

[論文]

メレオトポロジーの基本概念の 様相メレオロジー的分析

齋藤 暢 人

- 〈目次〉
0. はじめに
 1. 述語の解釈
 2. CM 述語の対合関係
 3. CMT 述語の対合関係
 4. 様相メレオロジー
 5. 様相メレオロジーへの翻訳
 6. 基本概念の統合的把握
 7. おわりに

0. はじめに

形式化された全体部分論であるメレオロジー Mereology を拡張することにより、接触などをも扱いうる形式的理論メレオトポロジー Mereotopology が得られる。興味深いのは、以下で詳説するように、メレオトポロジーの基本概念がメレオロジーと位相によって分析でき、いわばそれらの組み合わせに他ならないことが明示できる、ということである。

もちろんメレオトポロジーは、固有の述語をもつとはいえ、メレオロジーの延長線上に位置づけられる理論であるから、この事実は驚くに値しない、と言われるかもしれない。しかし、メレオトポロジーに固有の内容とは如何なるものなのかを具体的に指摘できる、という事実は、必ずしも自明ではないであろう。

分析手段は、位相作用素が追加されたメレオロジーである。これは、いわば様相メレオロジー Modal Mereology とでも言うべきものであるが、この理論のもとでメレオトポロジーの述語を捉えなおしてみると、メレオロジーからメレオトポロジーへの展開の過程を完全に解明することができる。本稿ではこれをひとつの目標とする。

しかしながら、様相メレオロジーの立場からは、さらなる理論的展開の可能性も展望できる。本稿の考察の真の意義はむしろここに求められるべきであろう。メレオロジーとメレオトポロジーの関連性の考察から、われわれは、事態の全容を視野に収める新たな地平へと上昇できるはずである。

なお、本稿において扱われるメレオロジー、メレオトポロジーの内容は範囲が限られているため、形式的体系の厳密な紹介は行わない。詳細については関連する文献を参照されたい。また、メレオロジー、メレオトポロジーには変種が知られているが、ここでは最も一般的な体系のみを考察の舞台とする。これらはそれぞれ古典的メレオロジー Classical Mereology、古典的メレオトポロジー Classical Mereotopology と称するにふさわしいものである。

以下、それぞれを「CM」「CMT」と略記することがある。

1. 述語の解釈

メレオロジー CM, メレオトポロジー CMT は多様な述語をもちうる。そのなかには相互に深い関連性を有するものがある。この関連性には人をして論理的感興を催さしむるところがあり、本稿の考察の焦点は主にそこにあてられる。

CM の述語のなかで特徴的なのは「 $x < y$ 」「 $x < > y$ 」「 $x > < y$ 」「 $x > y$ 」の四つ組である。これらはそれぞれ「 x は y の部分である」「 x は y と重複する」「 x は y と分離している」「 x は y の部分でない」と読む。最後の述語は、直観的には、 x は y からはみ出している、という関係を表す。これらはいずれも $<$ を原始概念とすることができる。つまり、 $<$ によって定義されうる。以下は定理の一部である。

$$(1.1) \quad x < > y \leftrightarrow \exists z (z < x \wedge z < y)$$

$$(1.2) \quad x > < y \leftrightarrow \neg x < > y$$

$$(1.3) \quad x > y \leftrightarrow \neg x < y$$

$$(1.4) \quad x < y \rightarrow x < > y$$

また「 $\forall z (z < y \leftrightarrow z > < x)$ なる唯一の y 」として定義される x の補元 $\sim x$ を用いると次のことがなりたつ。

$$(1.5) \quad x < \sim y \leftrightarrow x > < y$$

$$(1.6) \quad x < > \sim y \leftrightarrow x > y$$

この補元をとる操作は、定義から読み取れるように、一種の否定である。「 x の補元」とは、端的には「 x 以外のもの」である。つまり、一般的な否

定が文否定 sentence negation であるのに対して、このタイプの否定は名辞否定 term negation であると解することができる。

次に CMT の述語を紹介しよう。代表的なのは「IPxy」「Cxy」「Exy」「Rxy」などである。前二者はそれぞれ「x は y の内的部分である」「x と y は連続している」と読まれる。それに対して、後二者は前者の否定述語である。E は C の否定であり、R は IP の否定である。

これらのあいだには次のような関係がある。実は、IP と C は互いに双対である。

$$(1.7) \quad \text{IPxy} \leftrightarrow \neg \text{Cx} \sim y$$

$$(1.8) \quad \text{Cxy} \leftrightarrow \neg \text{IPx} \sim y$$

それゆえもちろん、E と R もまた双対である。

また、次がなりたつ。

$$(1.9) \quad \text{IPxy} \leftrightarrow \forall z (\text{Czx} \rightarrow z < > y)$$

CM 述語、CMT 述語の直観的な意味について説明しておこう。CM 述語と CMT 述語は、それぞれ独自の解釈の枠組みを必要とする。解釈は、述語をみたすべき主語 x, y の指示対象がどのような空間的位置関係にあるのか、というパターンである。CM は全体部分関係のみを扱うので、その述語は図 1 の左の五つのパターン (a から e) によって解釈できるが、CMT では接触を区別しなければならないので、その述語は図 1 の右の八つのパターン (1 から 8) によって解釈しなければならない。

この図 1 から、CM の対象が CMT においてはより精細に分別されていることがわかる。CM のためのパターンでは CMT 述語の解釈には不十分であるが、CMT のためのパターンで CM 述語を解釈することは可能である。CM のパターンは CMT のパターンに包含されているからである。

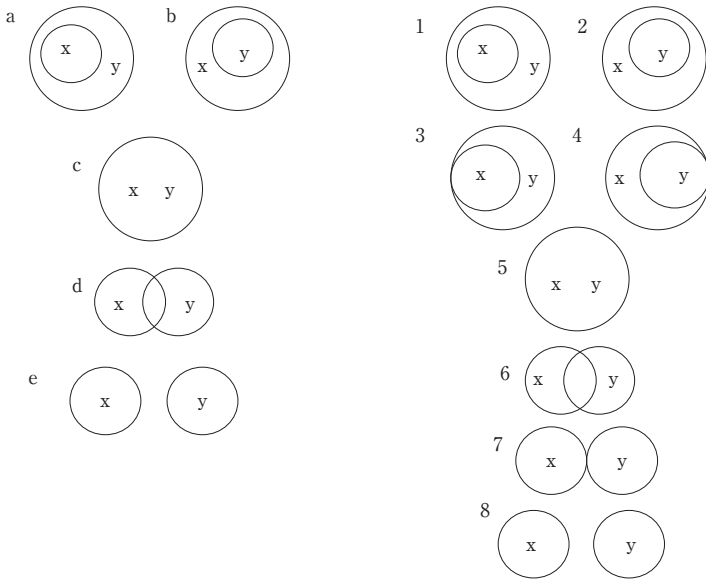


図1 メレオロジー，メレオトポロジーの解釈のためのパターン

表1 パターンによる述語の解釈

	IPxy	$x < y$	$x < > y$	Cxy	Exy	$x > < y$	$x > y$	Rxy
1	+	+	+	+	-	-	-	-
2	-	-	+	+	-	-	+	+
3	-	+	+	+	-	-	-	+
4	-	-	+	+	-	-	+	+
5	-	+	+	+	-	-	-	+
6	-	-	+	+	-	-	+	+
7	-	-	-	+	-	+	+	+
8	-	-	-	-	+	+	+	+

そこで，CMとCMTの主要な述語をいずれも1から8の八つのパターンで解釈すると，上記の表1が得られる。

たとえば，IPxyは，対象x，yが1のパターンをなすときにのみ真である。また， $x < y$ は，x，yが1，3，5のいずれかのパターンをなすときに

のみ真である。

これらの解釈から、可能なパターンの包含関係や相補的な分布などから、諸術語のあいだに含意関係や矛盾関係がなりたっていることがわかる。

2. CM 述語の対合関係

以上の解釈を前提としたうえで、メレオロジー CM の述語の対合 involution 関係と、それに基づく表現可能性を紹介することから考察を開始しよう。

まず対合について説明しておく、関係が対合をなしているとは、(CM に関連する目下の文脈においては) 以下の諸関係がなりたっていることである。⁽¹⁾ すなわち、関係 φ_{xy} と関係 $\neg\psi_{xy}$ が同値であるとき、 φ と ψ は否定 negational 関係にあるという。また、関係 φ_{xy} と関係 $\neg\psi_{x\sim y}$ が同値であるとき、 φ と ψ は双対 dual 関係にあるという。さらに、関係 φ_{xy} と関係 $\psi_{x\sim y}$ が同値であるとき、 φ と ψ は反双対 contradual 関係にあるという。

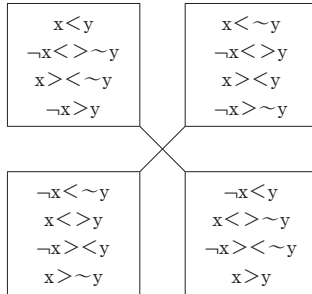
CM の四つの述語 \langle , $\langle\rangle$, $\rangle\langle$, \rangle のあいだにはこの対合関係が認められる。CM 述語のなかから、これらの関係をみだす組を以下のように容易にみつけることができる。

まず、 $\{\langle, \rangle\}$ と $\{\langle\rangle, \rangle\langle\}$ は否定関係にある。また、 $\{\langle, \langle\rangle\}$ と $\{\rangle\langle, \rangle\}$ は双対関係にある。そして、 $\{\langle, \rangle\langle\}$ と $\{\langle\rangle, \rangle\}$ は反双対関係にある。ゆえに、これら四つの述語は対合関係にある。

対合関係を表現するには、右の表 2 のような四角形の配置を採用するのが便利である。この配置は伝統的形式論理学の「対当の方形 Square of Opposition」に対応したものとみることができる。

そうしてみると、この表 2 は、先にその一例を紹介したメレオロジーの諸定理によって、CM 述語が相互にどのように言い換えられるのかをすべて表示していることがわかる。対角線に位置する述語は相互に矛盾関係にある。そして、同じ枠のなかにある式はすべて同値である。ここから直ちに気づか

表2 CMにおける対合



れるのは次の事実であろう。

定理 任意の CM 述語は、任意の CM 述語によって表現できる。

3. CMT 述語の対合関係

続いてメレオトポロジーの考察に移ろう。メレオトポロジー CMT はメレオロジー CM を拡張したものであり、具体的には、新たに述語 IP, C, E, R を付加したものである。これらのあいだでなりたつ双対関係についてはすでに述べた。IP と R, C と E の否定関係は定義から直ちに従う。ただし、これらはいずれも解釈から推測できる。双対関係にある述語のうち、一方をみたしうるケースは他方をみたしうるケースに包含されている。また、否定関係にある述語をみたすそれぞれのケースは、全ケースの直和分解になっている。また、述語のあいだの反双対関係についても、述語をみたしうるケースがいかなるものか、その組成を検討すれば明らかであろう。

こうした事実を総合すると、CMT 述語のあいだにも対合関係が認められ、しかもそれは CM の場合と類似している。また、やはり解釈から明らかであるが、 IP_{xy} ならば $x < y$ であり、また、 $x < > y$ ならば C_{xy} であって、これらの逆は成り立たない。こうした諸事実をもとに、CM 述語と

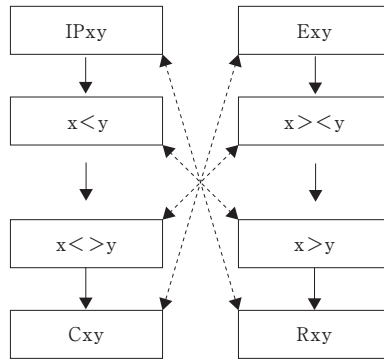


図2 CM と CMT の統合

CMT 述語，およびそれらの関係をひとつの図に統合して表現すると，上の図2のようになるであろう。

この図2において，実線の矢印は含意関係を，点線の矢印は矛盾関係を表す。

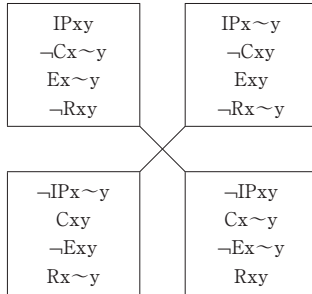
先に与えたこれら CMT 述語に関する対合の説明から，CMT 述語にもまた対当の関係があてはまるということは明らかであろう。それゆえ，CM 述語と CMT 述語をこのように統合するということは，先の対当の関係を一般化することに他ならないことを注意しておこう。

CMT 述語のあいだの対合関係についてももう少し詳しく説明する。

CMT 述語のうち， $\{IP, R\}$ と $\{C, E\}$ は否定関係に立つ。また， $\{IP, C\}$ と $\{E, R\}$ は双対関係に立ち，さらに， $\{IP, E\}$ と $\{C, R\}$ は反双対関係に立つ。

この対合関係を認めるならば，先の CM の場合と同様，CMT の各述語もまた，文否定と，補元をとる操作というもうひとつの否定，これら二種類の否定を用いて相互に関連づけられることは明らかであろう。それを表によって整理すると，右の表3のようになる。枠内の式はそれぞれ同値である（ここでの同値変形のために，先に挙げた CMT の基本概念の定義と定理が用いられていることに注意すべきである）。

表 3 CMT 述語の対合関係



さて以上より，CMT においては次がなりたつことがわかる。

定理 任意の CMT 述語は，任意の CMT 述語によって表現できる。

4. 様相メレオロジー

前節のメレオトポロジーの述語の検討では，それらのあいだに対合関係があるものと解釈した。つまり，それらを意味論的な立場から分析し，それに基づいてその相互関係を考えたわけである。

しかし，以上の考察は，各述語の代数的な関係を考慮することによって補強することができる。CMT 述語は，CM 述語と適切な位相作用素の組み合わせによっても表現できるのである。

もちろんそのためにはメレオロジーが位相 topology をもつように拡張されねばならない。位相は様相 modality を表現するとみることができるので，このようなメレオロジーは様相をもつメレオロジー，つまり様相メレオロジーである。

メレオロジーはブール代数なので，様相メレオロジーは様相ブール代数に相当する。CMT 述語を様相メレオロジーによって解釈するということは，CMT 述語に代数的意味論を与えることだと理解してもよい。

x の残部 $\sim ix$ $c\sim x$ $\sim e\sim x$ rx	境	x の内部 ix $\sim c\sim x$ $e\sim x$ $\sim rx$
x の外部 $i\sim x$ $\sim cx$ ex $\sim r\sim x$	界	x の閉包 $\sim i\sim x$ cx $\sim ex$ $r\sim x$

図 3 位相の相関

では、CM の拡張のために付加されるべき位相作用素とはなにか。対象 x の開核 (内部), x の閉包, x の外部といった、通常の数学で周知の概念は当然含まれるであろう。さらに、それらに加えて、 x の残部という概念も追加しよう。これらは幾何学的な位置関係におくことでも理解できるが、上掲の図 3 のように、名辞否定 (補元をとる操作) による互換性を利用して理解することもできる。

対象 x に関するさまざまな位相的概念がどのように相関するのかを直観的に表現したのがこの図 3 である。

ここで x と言えるのは x の閉包 cx までで、内部 ix はこれにまったく含まれるが、閉包はさらに境界をも含む。もはや x とは言えないものがあるのはその外部 ex である。しかし、外部をできるかぎり広く取ると「 x の内部ではないもの」である残部 rx を得ることができる。残部は外部を含むが、そればかりではなく、境界を含む。この図 3 から、これら一連の事実が直観的に容易に読み取れるであろう。

位相作用素は、採用する公理・定義によってその性質を変えうるが、ここでは、メレオトポロジーに相当するものとしての S5 ブール代数における性質をみたくする。⁽²⁾ その結果、位相の種類は、当初の i, c, e, r にかぎるまで、最大限節約される。つまり、位相作用素の重複は解消される。具体的には以下の表 4 におけるようになる。これは位相作用素の相関を網羅

した乗積表である。

この表 4 から、たとえば、 $iix=ix$ 、 $eix=rx$ 、 $rrx=ix$ などとなる。

乗積表は、第一義的には様相メレオロジーの位相作用素のふるまいを記述したものであり、そこから作用素のふるまいを規定するパターンを読み取ることができる。重要なのは、このパターンが一般的なもので、他の局面にも登場しうるといことである。本稿において考察している CM の述語や CMT の述語の基本性質も、無論このパターンに制約されているのである。その重要性は明らかであろうから、この表はのちに再び参照し、そこに含まれている情報について検討することとする。

以上のような性質をもつ位相作用素を用いることにより、CMT 述語を様相メレオロジーの表現に翻訳することができる。両者を右の表 5 のように対応させればよい。これにより、先のメレオトポロジーの対合関係は、改めて次の表 6 のように表現しなおすことができる。

これまでの一連の作業によって、CMT 述語と位相作用素の対応は明白となった。では、この結果をどのようにとらえればよいであろうか。

CMT 述語においては、それらのあいだの対合関係によってその位相的性質はもとより明らかであったと言える。しかし、ここで対応関係が明示されたことにより、この事実は厳密に検証された、としてよいであろう。位相作用素は、先に示したように、対象の内部や外部、境界を記述する概念として

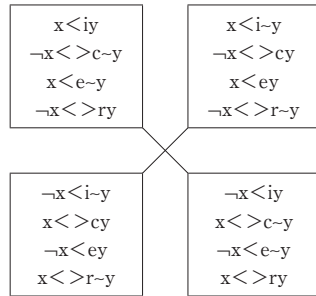
表 4 位相の乗積表

	i	c	e	r
i	i	c	e	r
c	i	c	e	r
e	r	e	c	i
r	r	e	c	i

表 5 述語の翻訳

メレオトポロジー	様相メレオロジー
IPxy	$x < iy$
Cxy	$x < > cy$
Exy	$x < ey$
Rxy	$x < > ry$

表 6 CMT 述語の分析



定義されるのであった。そうであれば、位相作用素を含む概念への翻訳という作業は、それによって CMT 述語のなかからその位相的性質を分離・抽出するものなのである。

5. 様相メレオロジーへの翻訳

これまでの準備から、様相メレオロジーを介することにより、メレオトポロジーがメレオロジーの延長線上にある理論であることが明確にすることができた。

だが、さらにもう一歩前進することにより、CMT 述語によって表現されている事態が様相メレオロジーによって完全に表現されることが明らかにな

表7 様相メレオロジーによる CMT 述語の表現

甲		丙	
$x < iy$ $\neg x < \neg iy$ $x > \neg iy$ $\neg x > iy$	$x < i \sim y$ $\neg x < \neg i \sim y$ $x > \neg i \sim y$ $\neg x > i \sim y$	$x < e \sim y$ $\neg x < \neg e \sim y$ $x > \neg e \sim y$ $\neg x > e \sim y$	$x < ey$ $\neg x < \neg ey$ $x > \neg ey$ $\neg x > ey$
$\neg x < i \sim y$ $x < \neg i \sim y$ $\neg x > \neg i \sim y$ $x > i \sim y$	$\neg x < iy$ $x < \neg iy$ $\neg x > \neg iy$ $x > iy$	$\neg x < ey$ $x < \neg ey$ $\neg x > \neg ey$ $x > ey$	$\neg x < e \sim y$ $x < \neg e \sim y$ $\neg x > \neg e \sim y$ $x > e \sim y$
乙		丁	
$x < \sim c \sim y$ $\neg x < \neg c \sim y$ $x > \neg c \sim y$ $\neg x > \sim c \sim y$	$x < \sim cy$ $\neg x < \neg cy$ $x > \neg cy$ $\neg x > \sim cy$	$x < \sim ry$ $\neg x < \neg ry$ $x > \neg ry$ $\neg x > \sim ry$	$x < \sim r \sim y$ $\neg x < \neg r \sim y$ $x > \neg r \sim y$ $\neg x > \sim r \sim y$
$\neg x < \sim cy$ $x < \neg cy$ $\neg x > \neg cy$ $x > \sim cy$	$\neg x < \sim c \sim y$ $x < \neg c \sim y$ $\neg x > \neg c \sim y$ $x > \sim c \sim y$	$\neg x < \sim r \sim y$ $x < \neg r \sim y$ $\neg x > \neg r \sim y$ $x > \sim r \sim y$	$\neg x < \sim ry$ $x < \neg ry$ $\neg x > \neg ry$ $x > \sim ry$

る。CMT 述語は、CM の否定的述語 $\langle \cdot \rangle$ によっても表現されうるのである。これは技術的にはまったく自明であるが、CMT 述語の表現についてさらに考察を深めるためには、全容を確認しておいたほうがよい。そこで、やや紙幅をとるが、結果を明示しておくこととする。左の表7は、メレオトポロジーの基本概念の様相メレオロジーによる可能な翻訳の全てを示したものである。

甲から丁の四つの表はそれぞれがCMT 述語の対合関係を表しているが、ここから直ちにわかるのは、どの基本概念についても、任意の位相作用素のみを用いた表現が可能である、ということである。しかも、組み合わせの相手となるCM 述語は、四種のうちのどれでもよい。それゆえ、次が言える。

定理 任意のCMT 述語は、任意のCM 述語によって、また、任意の位相作用素によって表現できる。

6. 基本概念の統合的把握

以上により、メレオトポロジー-CMT の基本概念を、様相をもつメレオロジーによって分析するという当初の目的は一応達成した。

しかしここで、これまでの議論を振り返ってみて気づかれることがひとつある。それは、メレオトポロジー-CMT に、メレオロジー-CM の基本概念がよく対応している、ということである。よく考えてみると、これは本来驚くべきことである。CM の述語には表面上位相との接点がないからである。

しかし現実にCM がCMT に対応する以上、われわれはこれまでの見方を修正する必要に迫られていると考えざるを得ない。つまり、CM のなかにすでに位相的要素が含まれていた、というように考えを改めるべきなのではないか、ということである。この新たな考えをもとにして、これまで登場したCM 述語、CMT 述語、様相メレオロジーの位相作用素を統一的な視点からとらえてみよう。

様相メレオロジーには、通常の文否定のほかに、名辞否定にあたる補元をとる操作があった。これらはもちろん全く異なる文法カテゴリにかかわる操作である。⁽³⁾ また、CM 述語と位相作用素もまた、全く異なる文法カテゴリにかかわるものである。⁽⁴⁾

しかし、これらをひとしく変換としてみた場合、前者はいずれも否定であり、また、後者はいずれも位相である。とくに CM 述語が位相であることは、対合の表に配置できることがすでに告知している。そこで、これらから対合と無関係なものを捨象してみよう。つまり、これらに共通する、対合の構造における〈位置〉を共通の要素として抽出するのである。この要素を「I」「C」「E」「R」で表そう。否定も共通の記号「N」で表すことにする（C, E, R は CMT 述語と同じ記号になるが、この文脈で混乱の恐れはないであろう。下の図4参照）。

そのうえで、異なる種類の概念が混在する先の表を、この〈位置〉によって置き換える。すると右の表8のようになる。

これらは、先の位相作用素の乗積表を利用すると、いずれも同じ表に帰着する（表9）。ここから、メレオロジーとメレオトポロジーの背景には、共通した代数的構造の存在が推定される、と言ってよいであろう。それは、かつて対当として知られていた構造をその表面の一部とするものであり、もちろん位相とも深く関係する。いま現在、その正体を適切に捉えるだけの言葉をわれわれはもたないが、すでに多くのヒントが与えられている。これまでの結果を導くにあたり重要だったのは、位相作用素の乗積表であった。これは半群 semigroup の一種である右群 right group（位数4）のものである。⁽⁵⁾

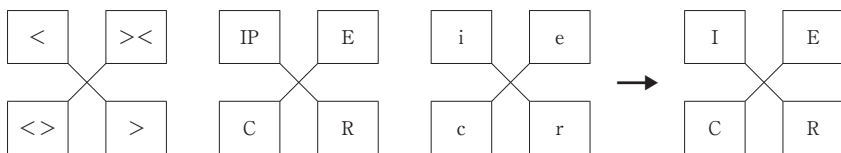


図4 対合における共通要素の抽象

表 8 様相メレオロジーによる表現の改訂

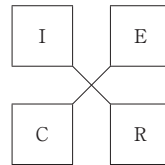
甲		乙		丙		丁	
II NCNI ENI NRI	IIN NCNIN ENIN NRIN	INCN NCCN ECN NRNCN	INC NCC EC NRNC	IEN NCNEN ENEN NREN	IE NCNE ENE NRE	INR NCR ER NRNR	INRN NCRN ERN NRNRN
NIIN CNIN NENIN RIN	NII CNI NENI RI	NINC CC NEC RNC	NINCN CCN NECN RNCN	NIE CNE NENE RE	NIEN CNEN NENEN REN	NINRN CRN NERN RNRN	NINR CR NER RNR

対当を含む諸概念は、半群論の立場からよりの確にと
 らえ直せるかもしれない。

7. おわりに

本稿前半で論じたように、メレオトポロジーの基本
 概念は様相メレオロジーによって正確に翻訳され、分析できる。しかしその
 結果はかえって、これらの概念の共通の代数的背景の存在を示唆するもので
 ある。この背景からはどのような発展が可能なのであろうか。さらに考察を
 深めたい。

表 9 帰結



[注]

- (1) 対合関係は特定の理論には依存しないので、他のかたちでもなりたちうる。
 ここでは直接関係するかたちに限って紹介する。
- (2) S5 プール代数については SAITO (2015) をみよ。
- (3) 文否定の文法カテゴリは s/s, 補元をとる操作のそれは n/n である。
- (4) CM 述語の文法カテゴリは s/nn, 位相作用素のそれは n/n である。
- (5) TAMURA (1972/2001), 第四章を参照。

文献

CASATI, R., *et al.*, 1999, *Parts and Places*, MIT Press

SAITO, N., (齋藤暢人), 2015, 「アリストテレスの様相論理とメレオトポロジー」
『論理哲学研究』9 (日本論理哲学会), 33-56

—, 2016a, 「様相三段論法のメレオトポロジー的考察」『東京電機大学総合文化
研究』14 (東京電機大学), 127-136

—, 2016b, 「部分と対合——メレオロジーにおける構造——」『フィロソフィ
ア』104 (早稲田大学哲学会), (15)-(34)

TAMURA, T., (田村孝行), 1972/2001, 『復刊 半群論』, 共立出版