軍縮の微分ゲームモデル

山　口　顕　秀

要約

本稿では公共政策への応用という観点から、微分ゲームを利用するにあたり基礎概念を確認する。微分ゲーム理論でよく用いられるテクニカルタームを説明した後に、モデルを例示し応用例として動学的最適化した軍縮問題を扱う。このことは、公共政策立案にあたっての政策評価に資することを目的としている。本稿では、軍備の過剰は、互いの国の厚生上望ましくないので、兵器ストックを削減しようと考える2国を設定し、互いに協

力的に削減するか、非協力的に削減するかを選択出来るとした。さらに両国を同質な選好を有する国同士の場合と互いに異質な選好を有する場合に分けた。通常、負の効用をもたらす財の削減は、協調した削減の方が、協調的でない削減よりも両国にとって望ましい結果を生むように考えがちであるが、本稿で示唆される結果は、協調的であるよりは、非協調的である方が負の効用をもたらす兵器ストック総量を低水準にする可能性があることを示し、また、それは必ずしも稀に起こる事象ではないことも示された。このことは、条約、協定、事前コミットメントといったものが必ずしも必要条件ではない可能性を示唆する。

キーワード
微分ゲーム　軍縮　公共政策　動学的最適化　feedback 型　open-loop 型

1　はじめに

本稿では、動学的最適化理論の道具である微分ゲーム理論を利用する。軍拡競争は、潜在的敵国の軍備増加に対応して自国の軍備を増加させる相互反応の意思決定過程と特徴づけることが出来る。加えて資源の最適配分という面も考察する必要がある。こうした資源制約と動学的ストック調整の下での意思決定分析を考える上で利用できるツールが微分ゲームである。

以下では資源制約の下で自らの行動を最適化する国家を想定し、社会的厚生を増加させる民間財消費と、自国の独立上不可欠な軍備との間で有限な資源をどう分配するかを考える。ここで想定する国家は、軍備からの効用が同じ場合と、異なる場合を想定してモデル化しているが、両国は自国と相手国の兵器ストック総量が減少することが望ましいと考えている、と仮定する。自らの資源制約と相手国の軍備から受ける脅威を考えた場合、国家は両国の軍拡がエスカレートする事を望まないと考えられるためである。また自国のみの一方的な軍縮は相手国に与える脅威を減らせるが、相

手国から受ける脅威を相対的に増大させることになり、自国の独立を優先に考える国家として合理的な選択ではない。そこで、両国が両国間の兵器ストック総量を削減するという枠組みならば軍縮の可能性があるものと仮定し、以下ではそのような制約条件を設定して分析を行う。

従来の軍縮研究へのモデルの応用例の多くは、リチャードソン・モデル（Richardson（1960））の延長上にあるか、それと整合的であるモデルで軍拡競争や紛争開始（臨界）点の発見や、その安定問題を検討してきた。その際にツールとして利用されたのが微分方程式やゲーム理論である。従来の軍拡競争モデルでは、McGuire（1965）とBoulding（1962）の一部の分析を例外として、２つの敵対国の目的は明示的に特定されることはなく、軍拡競争モデルは、その行動を駆り立てる動機を示すことなしに、兵器ストックの相互反応に焦点を当てる傾向にあった。そこで最適化されるべき目的を何に「すべきか」決めるときに、価値判断が不可欠という意味で「規範的」な規範的分析では一国の意思決定者を資源制約と動学的ストック調整制約の下で、国民の社会（経済）厚生を最大化する主体として記述し、行動を駆り立てる動機に解答する。

微分ゲームは、通常のゲーム理論と異なり、動学的最適化の系譜に位置づけられる。そのため、その枠組は最適制御理論を利用しており、規範的分析の様な制約の下での意思決定を記述するのに向いている。利用にあたり、微分ゲームでは前提となる情報構造を重視する。多くの微分ゲームモデルで、その扱いやすさから、open-loop型かfeedback型のいずれかを利用している。Brito（1972）やSimaan and Cruz（1973, 1975）にみられる規範モデルでは、closed-loop型が利用されている。closed-loop型では、各時点、およびそれよりも以前の状態変数の時間経路全体についての情報を持つとされ、多くの均衡が存在しうる。本稿では、扱いやすさと、その情報構造の持つ利点から、feedback型情報構造（各プレイヤーは、各時点の状態変数の実現値について情報を持つ）を仮定してモデル分析する。

open-loop 型では、最適制御分析で登場するポントリャーギンの最大値原理を利用した通常のハミルトニアンを設定して解く手法が利用できる。しかし、情報構造の異なる feedback 型では open-loop 型と同じ手法をそのまま適応出来ないため本稿ではベルマンの最適性原理と Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式を利用する。

2　モデル

本稿で扱うモデルは、「feedback 型[(1)]の情報構造の下で２つの国が、互いの脅威に基づく兵器ストック（軍備・兵力）を考慮しつつ、自国の厚生を最大にするように兵力を制御する」とする。feedback 型の情報構造とは、各時点においてプレイヤーが状態変数の実現値を観察して、毎期最適な戦略を決定していくような情報構造をいう。各プレイヤーは、相手の戦略が各期の状態変数に依存すると推測して、段階的に最適戦略を決める。

２つの国は同じ兵器ストック量から、ともに同じ選好の下で意思決定を行う「対称的な２国」と異なる選好の下で意思決定を行う「非対称的な２国」を考える。兵器ストック量の制御には２国間の関係に応じて２つの場合を想定する。１つは両国が制御に協調的である場合、もう１つは各国が非協調的に制御する場合である。後者について、さらに２つに分類する。１つは各国の選択しうる戦略の種類を状態変数に関して線形性を仮定した（liner Markov-perfect Strategy[(2)]）場合、もう１つはどちらの国の選択する戦略についても特に線形性は仮定しない場合である。これを各国が状態変数に関して非線形な戦略（non-liner Markov-perfect Strategy）を選択した場合とする。

後半において、モデルが対称的であるか非対称であるかにかかわらず、線形 Markov-perfect 戦略を採用した場合の最適な解曲線が非線形 Markov-perfect 戦略を採用した場合の解曲線の特殊型として得られることが示される。戦略が状態変数に関して線形か否かの分類は価値関数

（value function）を状態変数の２次式と仮定するか否かと同義に扱うことが出来るため、以下では２種の表現を区別なく利用する。

以下の構成を説明する。

２―１では、用いる記号・仮定等を説明した後、兵器ストック量の状態方程式と各国の厚生関数を定義する。

２―２では、協調的制御を行った場合の分析を行う。その結果は、続く２―３で得られる結果に対するベンチマークの役割も果たす。

２―３では、非協調的制御を行った場合の分析を行う。ここでは仮定される戦略に応じて異なる分析手法を用いる。線形 Markov-perfect 戦略を仮定した場合には当該期価値関数（current value function）が状態変数（ここでは兵器ストック量）の２次関数[3]であると推計する、feedback 最適解の導出法である guessing method を利用し、非線形 Markov-perfect 戦略を仮定した場合には補助方程式（auxiliary equation）を用いる方法を採用して分析を行う。

以上をまとめると下の表になる。ここで M とは兵器ストック量の定常値である。この定常値をもとに議論する。

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td>対称的な２国モデル</td><td>非対称的な２国モデル</td></tr>
<tr><td colspan="2">２-２
協調的な制御
（Cooperative Control）</td><td>M^{CS}
（同じ選好で意思決定を行う２国が協調的制御を行う場合）</td><td>M^{CA}
（異なる選好で意思決定を行う２国が協調的制御を行う場合）</td></tr>
<tr><td rowspan="2">２-３
非協調的な制御
（Uncooperative Control）</td><td>線形 Markov-perfect 戦略
（guessing method を利用）</td><td>M^{LS}
（同じ選好で意思決定を行う２国が、価値関数を状態変数の２次関数と仮定して、非協調的制御を行う場合）</td><td>M^{LA}
（異なる選好で意思決定を行う２国が、価値関数を状態変数の２次関数と仮定して、非協調的制御を行う場合）</td></tr>
<tr><td>非線形 Markov-perfect 戦略
（補助方程式を利用）</td><td>M^{NLS}
（同じ選好で意思決定を行う２国が、価値関数を状態変数の２次関数と仮定せず、非協調的制御を行う場合）</td><td>M^{NLA}
（異なる選好で意思決定を行う２国が、価値関数を状態変数の２次関数と仮定せず、非協調的制御を行う場合）</td></tr>
</table>

2－1　記号と仮定[4]

2国からなる経済を考える。両国には同質の消費者がそれぞれN人存在して生産活動が行われている。いま単純に消費財と兵器が生産されるとすると、次の様な関数で表現出来る。

$$Q_i = F_i(E_i)$$

Q_iは国iにおける生産量、E_iは生産規模がQ_iの時の兵器生産量を表す。ここで関数$F_i(\cdot)$は凹関数であり、かつ$f_i(0)=0$であると仮定する。kを所与の減耗率とすると、兵器ストック量Mは

$$\dot{M}(t) = E_1 + E_2 - kM(t) \qquad (1)$$

で表わされる状態方程式に従うと仮定する。

他方、国iの消費者の割引率をδ_iとすると、各国の厚生関数は次のように表現出来る。

$$W_i = \int_0^{\infty} \left[u_i\left(\frac{Q_i}{N}\right) - c_i(M) \right] e^{-\delta_i t} dt$$

ここで$u_i(\cdot)$は国iの代表的消費者が消費から得られる効用を表す。いま関数$u_i(\cdot)$について$u_i' > 0$、$u_i'' < 0$であると仮定する。また費用関数$c_i(\cdot)$については$c_i' > 0$、$c_i'' > 0$であることを仮定[5]する。以下では関数$u_i(\cdot)$、$c_i(\cdot)$形状を次のように特定する。

$$u_i\left(\frac{Q_i}{N_i}\right) = u_i\left(\frac{F_i(E_i)}{N_i}\right) = A_i \cdot E_i - \frac{1}{2} \cdot E_i^2$$

$$c_i(M) = \frac{s_i}{2} \cdot M^2$$

ここでA_iおよびs_iは所与の正定数である。このとき国iの消費者のt時点における純便益は

$$u_i\left(\frac{F_i(E_i)}{N_i}\right) - c_i(M) = A_i \cdot E_i - \frac{1}{2} \cdot E_i^2 - \frac{s_i}{2} \cdot M^2$$

となる。ただし、ここでは E_i に関する正の限界効用を保証するため $A_i-E_i>0$（民間財を兵器よりも多く生産する）を仮定する。このとき各国は現状のストック量 M を制約としながら、自らの兵器生産量 E_i をコントロールして各自の厚生 W_i を最大化しようと試みる。

以下でみる「非対称」とは、国 1 が国 2 に比べて、兵力増強よりも民間財の消費を選好する傾向がある（あるいは、国 2 は国 1 よりも軍拡を選好する）という意味で「非対称」である。対称モデルと非対称モデルの違いをパラメータの違いで定める。

対称モデル：$A_1=A_2,\ s_1=s_2,\ \delta_1=\delta_2$
非対称モデル：$A_1>A_2,\ s_1>s_2,\ \delta_1<\delta_2$

「$A_1>A_2$」国 1 は同じ量の「民間財の消費」から得られる効用が国 2 よりも大きい
「$s_1>s_2$」国 1 は国 2 よりも同じだけの「ストック量」からより多くの負の効用をこうむる
「$\delta_1<\delta_2$」国 1 は「将来の効用」を国 2 よりも高く評価している
特に必要な場合を除きパラメータの添え字は省略する。

2-2　協調的な兵器ストック量制御

本節では 2 国政府が互いに協調的に兵器生産量 E_i を制御して 2 国の純便益の総和の割引現在価値を最大にするようなケースを考える。

$$[\mathrm{CC}]\max_{E_1,E_2}\int_0^{\infty}e^{-\delta t}\left\{\left(A_1E_1-\frac{1}{2}E_1^2-\frac{s_1}{2}\cdot M^2\right)+\left(A_2E_2-\frac{1}{2}E_2^2-\frac{s_2}{2}\cdot M^2\right)\right\}dt$$

$$\text{s.t. }\dot{M}(t)=E_1+E_2-kM(t)$$

$$M(0)=M_0,\qquad \delta\equiv\mu\delta_1+(1-\mu)\delta_2$$

M_0 は兵器ストック量の初期値で所与、$\mu\in[0,1]$ も所与の定数である。

協調的制御問題［CC］の current value Hamiltonian は λ をハミルトン乗数とすると、

$$H(E_1,E_2,M,\lambda)=\left(A_1E_1-\frac{1}{2}E_1^2-\frac{s_2}{2}\cdot M^2\right)+\left(A_2E_2-\frac{1}{2}E_2^2-\frac{s_2}{2}\cdot M^2\right)+\lambda(E_1+E_2-kM(t))$$

と書ける。これにより、問題［CC］は手法として個人の最大化問題に帰着できる。最大化のための必要条件と、横断性条件（transversality condition）は次のようになる。

（最大化のための必要条件）

$$\frac{\partial H}{\partial E_1}=A_1-E_1+\lambda=0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial E_2}=A_2-E_2+\lambda=0 \qquad (3)$$

$$\dot{\lambda}=\delta\lambda-\frac{\partial H}{\partial M}=\delta\lambda-\{-(s_1+s_2)M-\lambda k\}=(s_1+s_2)M+(\delta+k)\lambda \qquad (4)$$

（横断性条件）

$$\lim_{t\to\infty}\lambda(t)\cdot M(t)\cdot e^{-\delta t}=0$$

(2) 式と (3) 式から状態方程式 (1) は、

$$\dot{M}(t)=(A_1+A_2)+2\lambda-kM$$

と変形され、問題［CC］に対して解が満たすべき動学方程式体系は、

$$\begin{cases}\dot{M}(t)=(A_1+A_2)+2\lambda-kM\\ \lambda=(s_1+s_2)M+(\delta+k)\lambda)\end{cases} \qquad (5)$$

となる。ゆえに定常状態は、これをゼロと置くことで得られ、

$$\begin{cases}(A_1+A_2)+2\lambda-kM=0 \\ (s_1+s_2)M+(\delta+k)\lambda=0)\end{cases} \quad (6)$$

を満たす M と λ の組として定まる。このときのストックの定常状態は、

$$M^C=\frac{(A_1+A_2)(\delta+k)}{2(s_1+s_2)+k(\delta+k)}$$

となることがわかる。対称モデルにおけるストックの定常状態を M^{CS}、非対称モデルの定常状態を M^{CA} とおけば、

$$M^{CS}=\frac{2A(\delta+k)}{(4s+k(\delta+k)} \qquad \text{（1と2を区別しない対称2国モデル）}$$

$$M^{CA}=\frac{(A_1+A_2)(\delta+k)}{2(s_1+s_2)+k(\delta+k)} \qquad \text{（1と2を区別する非対称2国モデル）}$$

これらの定常状態はそれぞれ一意に決まる。

現実には、各国が協調して兵器ストック量を削減するような状況は核戦力といったケース以外はあまり期待できないので、次では非協調的な制御に関して考察する。

2－3　非協調的な兵器ストック量制御

本節では、2国政府が非協調的に兵器ストック制御をする場合を考える。次のように2プレイヤーの微分ゲームを定式化する。

$$[\mathrm{UCC}]\max_{E_i}\int_0^\infty e^{-\delta_i t}\left(A_iE_i-\frac{1}{2}E_i^2-\frac{s_i}{2}M^2\right)dt \qquad (i=1,2)$$

$$\text{s.t.}\quad \dot{M}(t)=E_1+E_2-kM(t)$$

$$M(0)=M_0$$

ここで、国 i は feedback 型情報構造に直面しながら、自らの利得関数を最大化すべく兵器ストックを制御している、とする。また両国は、

feedback 型情報構造の下で Markov-perfect 戦略を採用していると仮定する。非協調的制御問題［UCC］における国 i の戦略集合は次のように定義する。

$$M_i^{MP} = \{E_i(M(t)) | E_i(M) \text{ は } M \text{ に関して Lipschitz 連続}\}$$

このゲームに関する Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式を満たす国 i の当該期価値関数が存在するならば、その Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式から非協調的制御問題［UCC］に対する最適 feedback 戦略を導出出来る。そこで、次の Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式を満たすような国 i の当該期価値関数 $W_i(M)$ が存在すると仮定する。

但し $W_i(M)$ は M に関して連続微分可能であると仮定する。

$$\delta_i W_i(M) = \max_{E_i} \left[A_i E_i - \frac{1}{2} E_i^2 - \frac{s_i}{2} M^2 + W_i'(M) \cdot (E_1 + E_2 - kM) \right] \quad (i=1, 2) \qquad (6)$$

(6) 式から $E_i (i=1, 2)$ に対する解を求めるために次の 2 つの方法を用いる。

1 つは、当該期価値関数が状態変数 M に関する 2 次関数と仮定することから解を求める「guessing method」であり、もう 1 つは、$W_i(M)$ に関して特定の関数形を仮定せず、「補助方程式」を用いて解を求める方法である。当該期価値関数に関する仮定から guessing method によって得られる $E_i (i=1, 2)$ の最適解は M に関して線形になる。そこで guessing method から得られる解を「線形 Markov-perfect 戦略」、補助方程式から得られる解を「非線形 Markov-perfect 戦略」と呼ぶ。

2‐3‐1　線形 Markov-perfect 戦略（guessing method）を用いるケース

［UCC］の当該期価値関数を、関数を上に凸とすることで兵器ストックの過剰を好ましくない、と設定するため

$$W_i(M) = -\frac{1}{2}\alpha_i M^2 - \beta_i M - \mu_i \qquad ①$$

と仮定する。ここで $W_i'(M) \leq 0$ である。①と（6）式の右辺の最大化問題に対する必要条件から

$$E_i = A_i + W_i'(M) = A_i - (\alpha_i M + \beta_i) \quad (i = 1, 2) \qquad ②$$

が成立する。

（6）式に①と②を代入した式の定数項、M の係数、M^2 の係数は次式を満たす必要がある。

$$\text{定数項}: -\mu_i\delta_i = \frac{1}{2}A_i^2 - \frac{1}{2}\beta_i^2 - (A_1 + A_2)\beta_i + (\beta_1 + \beta_2)\beta_i$$

$$\text{Mの係数}: -\beta_i\delta_i = -\alpha_i\beta_i - (A_1 + A_2)\alpha_i + (\beta_1 + \beta_2)\alpha_i + (\beta_1 + \beta_2)\beta_i + \beta_i k$$

$$M^2\text{の係数}: -\frac{1}{2}\alpha_i\delta_i = -\frac{s_i}{2} - \frac{1}{2}\alpha_i^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_i + \alpha_i k$$

対称モデルの場合、パラメータが同じになるので連立方程式体系は、

$$-\mu\delta = \frac{1}{2}A_2 + \frac{3}{2}\beta_2 - 2A\beta$$

$$-\beta\delta = 3\alpha\beta - 2A\alpha + \beta k$$

$$-\frac{1}{2}\alpha\delta = -\frac{s}{2} + \frac{3}{2}\alpha^2 + \alpha k$$

となる。これらを解くと、

$$\alpha^* = \frac{1}{3}\left\{-\left(k + \frac{\delta}{2}\right) + \sqrt{\left(k + \frac{\delta}{2}\right)^2 + 3s}\right\} > 0$$

$$\beta^* = \frac{2A\alpha^*}{\delta + k + 3\alpha^*}$$

$$\mu^* = -\frac{(A - \beta^*)(A - 3\beta^*)}{2\delta} \qquad (S1)$$

となり、対称モデルの α、β、μ が求まる。但し α には、

$$\alpha = \frac{1}{3}\left\{-\left(k + \frac{\delta}{2}\right) - \sqrt{\left(k + \frac{\delta}{2}\right)^2 + 3s}\right\} > 0$$

も存在するが、$W_i'(M) \leq 0$ から、こちらは検討しない。

非対称モデルの場合は

$$-\mu_1\delta_1 = \frac{1}{2}A_1^2 + \frac{1}{2}\beta_1^2 - (A_1 + A_2 + \beta_2)\beta_1$$

$$-\beta_1\delta_1 = -(A_1 + A_2)\alpha_1 + (\beta_1 + \beta_2)\alpha_1 + (\alpha_2 + k)\beta_1$$

$$-\frac{1}{2}\alpha_1\delta_1 = -\frac{s_1}{2} + \frac{1}{2}\alpha_1^2 + (k + \alpha_2)\alpha_1$$

$$-\mu_2\delta_2 = \frac{1}{2}A_2^2 + \frac{1}{2}\beta_2^2 - (A_1 + A_2 + \beta_1)\beta_2$$

$$-\beta_2\delta_2 = -(A_1 + A_2)\alpha_2 + (\beta_1 + \beta_2)\alpha_2 + (\alpha_1 + k)\beta_2$$

$$-\frac{1}{2}\alpha_2\delta_2 = \frac{1}{2}\alpha_2^2 + (\alpha_1 + k)\alpha_2 \qquad (s_2 = 0)$$

これを解くと、

$$\alpha_1^* = \frac{-(\delta_1 + 2k) + \sqrt{(\delta_1 + 2k)^2 + 4s_1}}{2} > 0$$

$$\beta_1^* = \frac{A_1 + A_2}{\delta_1 + \alpha_1^* + k}\alpha_1^*$$

$$\mu_1^* = -\frac{A_1^2 + (\beta_1^*)^2 - 2(A_1 + A_2)\beta_1^*}{2\delta_1}$$

$$\alpha_2^* = \beta_2^* = 0$$

$$\mu_2^* = -\frac{A_2^2}{2\delta_2} \qquad \text{(AS1)}$$

但し、仮定 $W_i'(M) \leq 0$ により、

$$\alpha_1 = \frac{-(\delta_1 + 2k) - \sqrt{(\delta_1 + 2k)^2 + 4s_1}}{2} < 0$$

は採用されない。

また非対称モデルでは $s_2 = 0$（国２の民間財・兵器の生産量の分配の意思決定は兵器ストック量水準に依存しない）が仮定されている。

②から M の最適経路は、

$$\dot{M}(t)=E_1(M)+E_2(M)-kM=(A_1+A_2)-(\beta_1+\beta_2)-(\alpha_1+\alpha_2+k)M$$

に従う。最右辺＝0 を解いて、ストックの定常状態 M^L が、

$$M^L=\frac{A_1+A_2-(\beta_1^*+\beta_2^*)}{\alpha_1^*+\alpha_2^*+k}$$

となる。これにより、両国が Markov-perfect 均衡戦略を採用した場合のストック量の定常状態は次になる。

$$M^{LS}=\frac{2A(\delta+k+\alpha)}{(2\alpha+k)(\delta+k+3\alpha)} \qquad \text{（対称モデルの場合）} \qquad \text{(S2)}$$

$$M^{LA}=\frac{(A_1+A_2)(\delta_1+k)}{s_1+k(\delta_1+k)} \qquad \text{（非対称モデルの場合）} \qquad \text{(AS2)}$$

対称モデル、非対称モデルともに $\alpha_i>0$ が採用されるならば

$$\frac{d\dot{M}}{dM}=-(\alpha_1^*+\alpha_2^*+k)<0$$

であり、M^L は漸近的に安定である。

2 国が線形 Markov-perfect 戦略が採用した場合の最適戦略は、次のように与えられる。

$$E_i^{LS}(M(t))=(A-\beta^*)-\alpha^*M(t) \qquad (i=1,2) \qquad \text{（対称モデル）}$$

$$E_i^{LA}(M(t))=(A-\beta_i^*)-\alpha_i^*M(t) \qquad (i=1,2) \qquad \text{（非対称モデル）}$$

M^L 同様に定常状態の安定性を調べると、

$$E_i^{LS}(M^{LS})=\frac{Ak(k+\alpha+\delta)}{2s+k^2+(\alpha+\delta)k}>0 \qquad (i=1,2)$$

$$E_i^{LA}(M^{LA})=A_1-\frac{(A_1+A_2)s_1}{s_1+k(\delta_1+k)}\geq 0 \qquad \left(\delta_1\geq\frac{A_2s_1}{A_1k}-k\text{のとき}\right)$$

$$E_2^{LA}(M^{LA})=A_2>0$$

より、漸近的に安定といえる。各国が上記の均衡戦略を採用した場合の、

0 時点における両国の価値関数の値 $W_i(M)$ $(i=1, 2)$ は、

$$W_i(M_0) = -\frac{1}{2}\alpha_i M_0^2 - \beta_i M_0 - \mu_i \qquad (i=1, 2)$$

となる。

ここで M^{LS} と M^{CS}、M^{LA} と M^{CA} を比較する。

$$M^{LS} - M^{CS} = \frac{2A(\delta+k)(6\alpha^2+3k\alpha+2\delta\alpha)}{(2\alpha+k)(\delta+k+3\alpha)\{4s+k(\delta+k)\}} > 0$$

が成立している。よって $M^{LS} > M^{CS}$ である。また、

$$M^{LA} - M^{CA} = s_1(A_1+A_2)\frac{\{\mu(\delta_2-\delta_1) - \delta_2 + k + 2\delta_1\}}{\{s_1+k(\delta_1+k)\}\{2s_1+k(\delta+k)\}}$$

であるから、パラメータが $\mu > (\delta_2 - k - 2\delta_1)/(\delta_2 - \delta_1)$ という関係を満たしてときに限り、$M^{LA} > M^{CA}$ となる。非対称モデルの場合、「**2国が協調的にストック量制御を行った場合よりも、非協調的にストック量制御を行った場合の方が、より低いストック量水準の定常状態が実現する**」可能性があることが示唆される。

2‐3‐2　線形 Markov‐perfect 戦略（補助方程式）を用いるケース

今度は価値関数を2次関数に限定せずに最適戦略を導出する。このケースでは、Hamilton‐Jacobi‐Bellman 方程式を状態変数 M で微分して得られる補助方程式を用いる。

対称的な2国モデルを考える。(6) 式の右側の最大化問題に対する最適解を下のように書く（添え字をとって表記を簡素化する)。

$$E(M) = A + W'(M) \qquad (7)$$

(7) 式を (6) 式に代入することによって、

$$\delta \cdot W(M) = AE - \frac{1}{2}E^2 - \frac{s}{2}M^2 + (E-A)(2E-kM) \qquad (8)$$

が得られる。$\delta=0$ の場合、(8) 式より、

$$E=\frac{1}{3}(A+kM)\pm\sqrt{\frac{(A+kM)^2}{9}+\frac{sM^2}{3}-\frac{2AkM}{3}} \qquad (9)$$

という最適解が求まる。そこでδ>0 の解を次のように仮定する[6]。

$$E=\frac{1}{3}(A+kM)+h(M) \qquad (10)$$

（10）式を（8）式に代入して整理すると、

$$\delta\cdot W(M)=-\frac{1}{6}A^2-\frac{1}{6}k^2M^2-\frac{s}{2}M^2+\frac{2}{3}AkM+\frac{3}{2}\{h(M)\}^2$$

これを状態変数 M で微分すると、

$$\delta\cdot W'(M)=-\frac{1}{3}k^2M-sM+\frac{2}{3}Ak+3h(M)\cdot h'(M) \qquad (11)$$

この（11）式が補助方程式である。ここでは以下の文字を用いて式を簡略化する。

$$F\equiv\frac{\delta k+k^2+3s}{3}, \qquad C\equiv\frac{2A(k+\delta)}{3}, \qquad X\equiv M-\frac{C}{F}$$

(7)、(10) 式から補助方程式（11）は

$$h'(M)=\frac{\delta h(M)+FX}{3h(M)} \qquad (12)$$

と書き直される。$\delta=0$のとき、(12) の解は、

$$h(M)=\pm\sqrt{\frac{(A+kM)^2}{9}+\frac{sM^2}{3}-\frac{2AkM}{3}}$$

となり、解の形状は（10）式の仮定で妥当といえる。

関数 h(M) は、$X\left(=M-\frac{C}{F}\right)$ の関数ともおきかえられるから、(12) 式は、

$$\frac{dh(X)}{dX}=\frac{\delta h(X)+F\cdot X}{3h(X)}$$

と書き換えられる。さらに $Z=\frac{h(X)}{X}$ とおけば、

$$\frac{dZ}{dX}\cdot X = h' - \frac{h}{X} = \frac{\delta Z + F - 3Z^2}{3X}$$

したがって整理して積分すると、

$$\frac{3Z}{F + \delta Z - 3Z^2} dZ = \frac{1}{X} dX \qquad (13)$$

$$\int \left(\frac{\xi_1}{Z - Z_a} + \frac{\xi_2}{Z - Z_b} \right) dZ = \int \frac{1}{X} dX \qquad (14)$$

となる。ただし、$\xi_1 \equiv -\xi_2 - 1$、$\xi_2 \equiv -\dfrac{Z_a}{Z_a - Z_b}$ であり、Z_a、Z_b は方程式 $3Z^2 - \delta Z - F = 0$ の解である。κ を積分定数とすれば、

$$\xi_1 \ \log|Z - Z_a| + \xi_2 \ \log|Z - Z_b| - \log|X| = \kappa$$

Z の定義と、$\xi_1 + \xi_2 = -1$ より、

$$e^{\kappa} = |h - XZ_a|^{\xi_1} |h - XZ_b|^{\xi_2}$$

となる。この式に、

$$h = E - \frac{A}{3} - \frac{kM}{3}, \qquad X = M - \frac{C}{F}$$

を代入することにより、

$$e^{\kappa} = \left| E - \left\{ \left(Z_a + \frac{k}{3} \right) M + \frac{A}{3} - Z_a \frac{C}{F} \right\} \right|^{\xi_1} \cdot \left| E - \left\{ \left(Z_b + \frac{k}{3} \right) M + \frac{A}{3} - Z_b \frac{C}{F} \right\} \right|^{\xi_2} \quad (15)$$

が得られる。ここで、

$$F \equiv \frac{\delta k + k^2 + 3s}{3}, \qquad C \equiv \frac{2A(k + \delta)}{3}$$

$$Z_a \equiv \frac{\delta}{6} + \sqrt{\frac{\delta^2}{36} + \frac{F}{3}} > 0, \qquad Z_b \equiv \frac{\delta}{6} - \sqrt{\frac{\delta^2}{36} + \frac{F}{3}} < 0$$

とおいて簡略化して表記している。(15) 式の特殊解を E_a、E_b とすると、

$$E_a = a(M) = \left(Z_a + \frac{k}{3} \right) M + \frac{A}{3} - Z_a \frac{C}{F}$$

$$E_b = b(M) = \left(Z_b + \frac{k}{3}\right)M + \frac{A}{3} - Z_b\frac{C}{F}$$

となる。

3　安定性

3－1　対称的な2国のケース

対称的な2国が、非線形 Markov-perfect 戦略を採用した時のストックの定常状態（M^{NLS} とおく。）に関する安定性について考察する。

対称モデルの場合、$\dot{M} = 2E(M) - kM$ であるから、M^{NLS} は $\dot{M} = 0$ より

$$E(M^{NLS}) = \frac{kM^{NLS}}{2} \qquad ①$$

を満足しなければならない。M^{NS} が漸近的に安定であるための十分条件は、

$$\frac{d\dot{M}}{dM} = 2E'(M^{NLS}) - k < 0$$

である。(10) 式、①、(12) 式より

$$\frac{\delta kM^{NLS} - 2\delta A + 6M^{NLS}F - 6C}{3kM^{NLS} - 6A} < \frac{k}{6} \qquad ②$$

①と $E < A$（兵器＜民間財）より、②の左辺分母は負、②は

$$M^{NLS} > \frac{4\delta A + 12C - 2Ak}{2\delta k + 12F - k^2}$$

となる。C、F を代入すれば、

$$M^{NLS} > \frac{4\delta A + 2Ak}{2\delta k + k^2 + 4s}$$

①と $E < A$ から、

$$\frac{4\delta A + 2Ak}{2\delta k + k^2 + 4s} = \tilde{M} < M^{NLS} < \frac{2A}{k}$$

という不等式が成り立ち、M^{NLS} は漸近的に安定といえる。

もし割引率δが十分に小ならば、$\tilde{M}$ は $\dfrac{2Ak}{4s+k^2}$ に近似し、M^{CS} に十分近い値をとる。これはδが十分小であるときには、M^{NLS} が M^{CS} に十分近い水準を達成可能であることを示唆する。言い換えると、「**同じ選好の場合、非協調的であっても協調的なストック水準に水準を達成可能**」であることを示唆する。

3－2　非対称的な2国のケース

非対称2国モデルにおいて、非線形 Markov-perfect 戦略を採用した場合の兵器ストック量制御を考察する。

非対称モデルでは、最適解 $E_i(M)$ は、

$$E_i = A_i + W_i'(M) \qquad (i=1, 2) \qquad (16)$$

$s_2=0$（国2の民間財・兵器の分配に関する意思決定は兵器ストックの水準に依存しない）と仮定すれば、各国の Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式は、

$$\delta_1 W_1(M) = \frac{1}{2}A_1^2 - \frac{1}{2}s_1 M^2 - \{W_1'(M)\}^2 + W_1'(M)\{A_1 + A_2 + W_1'(M) - kM\} \quad (17)$$

$$\delta_2 W_2(M) = \frac{1}{2}A_2^2$$

となる。

対称モデルのときと同様に、(17) 式を M で微分すれば、補助方程式

$$Y'(M) = \frac{(\delta_1 + k)\cdot Y(M) + s_1 M}{A_1 + A_2 + Y(M) - kM} \qquad (Y \equiv W_1'(M))$$

が得られる。ここで、

$$\eta \equiv -\frac{(A_1 + A_2)s_1}{s_1 + k(\delta_1 + k)}, \quad \theta \equiv \frac{(A_1 + A_2)(\delta_1 + k)}{s_1 + k(\delta_1 + k)} (= M^{LA})$$

$$\bar{Y} = Y - \eta, \qquad \bar{M} \equiv M - \theta$$

とおく。補助方程式は、

$$\frac{d\bar{Y}}{dM}=\frac{dY}{dM}=\frac{(\delta_1+k)\cdot\bar{Y}+s_1\bar{M}}{\bar{Y}-k\bar{M}}=\frac{\delta_1+k+s_1\left(\frac{\bar{M}}{\bar{Y}}\right)}{1-k\left(\frac{\bar{M}}{\bar{Y}}\right)}$$

と書き換えられる。$D=\frac{\bar{M}}{\bar{Y}}$ とおけば、

$$\frac{d\bar{Y}}{dM}=\frac{d\left(\frac{\bar{M}}{D}\right)}{dM}=\frac{D-\bar{M}\left(\frac{dD}{d\bar{M}}\right)}{D^2}$$

２式より、

$$\frac{\frac{1}{D}-k}{1-(\delta_1-2k)D-s_1D^2}\cdot\frac{dD}{d\bar{M}}=\frac{1}{\bar{M}} \qquad (18)$$

$$1-(\delta_1-2k)D-s_1D^2=0$$

の解を D_a、D_b とおき、それらを使って次のように定義する。

$$\gamma_a\equiv 1-\gamma_b, \qquad \gamma_b\equiv -\frac{D_a+\frac{k}{s_1}}{D_b-D_a}$$

これを用いて、(18) 式を整理して積分すると

$$\int\left\{\frac{1}{D}-\left(\frac{\gamma_a}{D-D_a}+\frac{\gamma_b}{D-D_b}\right)\right\}dD=\frac{1}{s_1}\int\frac{1}{\bar{M}}\,d\bar{M}$$

したがって、

$$\log|D|-\gamma_a\log|D-D_a|-\gamma_b\log|D-D_b|-\frac{1}{s_1}\log|\bar{M}|=\kappa$$

が成立する。D の定義と $\gamma_a+\gamma_b=1$ より、

$$e\kappa\cdot|\bar{M}|^{\frac{1}{s_1}-1}=|\bar{M}-\bar{Y}D_a|^{-\gamma_a}|\bar{M}-\bar{Y}D_b|^{-\gamma_b}$$

簡素化のために、$s_1=1$（兵器ストック量の増大が100% 負の効用になる）のみ考える。

$$e\kappa = |M-\theta-(Y-\eta)D_a|^{-\gamma_a}|M-\theta-(Y-\eta)D_b|^{-\gamma_b} \qquad (19)$$

但し、

$$D_a = \frac{-(\delta_1+2k)-\sqrt{(\delta_1+2k)^2+4s_1}}{2s_1} < 0$$
$$D_b = \frac{-(\delta_1+2k)+\sqrt{(\delta_1+2k)^2+4s_1}}{2s_1} > 0$$

である。ここで、(19) 式の 2 つの特殊解を Y_a、Y_b とで表わす。このとき、

$$Y_a = a(M) \equiv \frac{M-\theta+\eta D_a}{D_a}$$
$$Y_b = b(M) \equiv \frac{M-\theta+\eta D_b}{D_b}$$

非対称モデルでも対称モデル同様、非線形 Markov-perfect 戦略を採用した場合の 1 つの最適解 A_1+Y_a が、線形 Markov-perfect 戦略を仮定した場合の最適解 $E_1^{LA}(M(t)) = (A_1-b_1^*)-\alpha_1^* M(t)$ と同じ形になることが示される。

定常状態でのストック値を考察する。非線形 Markov-perfect 戦略を採用した場合の非対称モデルでは、ストックの最適蓄積経路は $\dot{M} = A_1 + A_2 + Y(M) - kM$ で与えられる。ゆえに、$\dot{M}=0$ となるような M を M^{NA}、$Y(M^{NLA})$ を Y^{NLA} とおけば、$\dot{M}=0$ は、

$$Y^{NLA} = -(A_1+A_2)+kM^{NLA}$$

である。さらに、

① $Y_a = a(M)$、$Y_b = b(M)$、$\dot{M}=0$ は点 $(Y, M) = (7, 0)$ を通る。
② $\dot{M}=0$ の切片は $Y_b = b(M)$ の切片よりも大きい。
③ $Y_a = a(M)$ の傾きと切片の値は負。

④ $\dot{M}=0$ は点$(Y, M)=(-A_1, \frac{A_2}{k})$を通る。

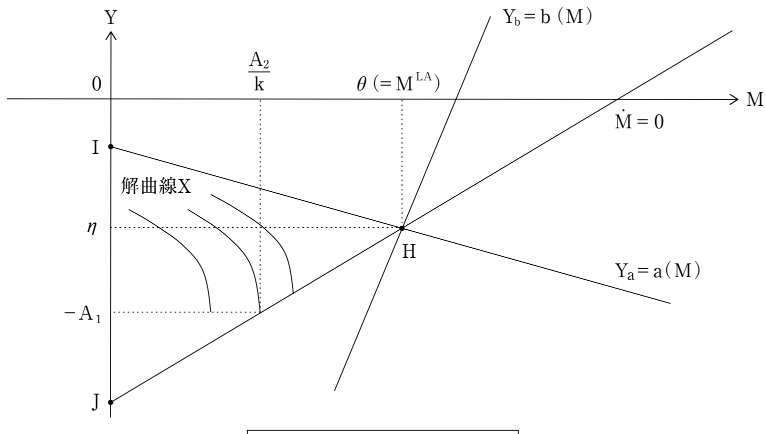
⑤ $\dot{M}=0$ の切片の値は（$-(A_1+A_2)$）なので$-A_1$よりも小さい。

を利用して解曲線を描くと下のグラフになる。

仮定$E_1 \geq 0$と、$E_1=A_1+Y$より、$Y \geq -A_1$が成立する。したがって、η $>(Y \geq)-A_1$の場合、直線$\dot{M}=0$に届くような解曲線が存在する。三角形HIJの$Y \geq -A_1$部分に存在する解曲線のうち、ストックの定常状態の中で、最も低水準に対応するのは、直線$\dot{M}=0$に接する解曲線Xであることがわかる。さらに、

$$\frac{d\dot{M}}{dM}=Y'(M)-k=\frac{\delta_1 Y+(s_1+k^2)M-(A_1+A_2)k}{A_1+A_2+Y-kM}$$

であり、三角形HIJにおいて上式の分母は正、分子は$\left(-A_1, \frac{A_2}{k}\right)$に近似する



解曲線（$\eta > -A_1$のケース）

につれて負の値をとるようになる。

以上から、非対称的な２国モデルでは、パラメータに関する条件 $\delta_1 > \left(\frac{A_2}{A_1 k}\right) - k$（i.e. $s_1 = 1$, $h > -A_1$）の下で、非対称的な２国が非線形 Markov -perfect 戦略を採用した場合、$Y(0) < 0$ から出発し、局所安定的なストックの定常状態 $M^{NLS} = \frac{A_2}{k}$ に到達するような解曲線が存在する。但し $Y(0)$ は、

$$-A_1 < Y(0) < (\text{直線 } Y_a = a(M) \text{ の切片の値})$$

を満たす。

非対称２国モデルにおいて、協調的ストック量制御を行った場合と、非協調的ストック量制御を行った場合の、定常状態におけるストック量水準を比較検討する。

$s_1 = 1$ のとき $M^{CA} > M^{NLA}$ となるための必要十分条件は、

$$\mu < \frac{A_1 k(\delta_2 + k) - 2A_2}{A_1 k(\delta_1 - \delta_2)}$$

である。したがって $s_1 = 1$ のとき、

$$\delta_1 > \frac{A_2}{A_1 k} - k$$

が、$M^{CA} > M^{NLA}$ ための十分条件の１つになっている。

非対称モデルでは、パラメータがある関係を満たしている場合、ストックの定常状態の水準が協調的なストック量制御の場合よりも、非協調的なストック量制御の場合の方が低い値をとり得ることを示唆する。

4　結論

主な結論をまとめる。

1．対象２国の選好が同じモデルにおいては、割引率が十分小さい（将来よりも現在の消費をより大切にする）ならば、非協調的制御で、価値関数（効用関数）を２次関数と仮定しない場合が採用された時のストック水準は協調的な制御の場合に十分近い水準になる。

2．しかし、非協調的な制御の場合の水準は、協調的な制御の場合の水準を下回ることはない。協調的な場合の方がよりストック総量が低い水準になる。

3．選好が異なるモデルにおいては、非協調的な制御の場合のストック量水準が、協調的な制御の場合の水準を下回ることがある。

4．非協調的な制御の場合で、特に価値関数を２次関数と仮定しない場合が採用された時に、民間財消費をより選好する国の割引率が十分大きい（現在よりも将来の消費をより大切にする）ことが上の状況を実現させるための条件の１つである。

5．２国政府が非協調的な制御の場合、価値関数を２次関数と仮定しない方が、２次関数と仮定する場合よりも、多くの解を見出せる。

6．多数の解の中には、価値関数を２次関数と仮定しない方が、２次関数と仮定する場合よりも、より低水準のストック量に対応する解がある。但し、モデルから、どの解を選ぶべきなのか自動的に決定出来ない。

通常、負の効用をもたらす財の削減は、協調した削減の方が、協調的でない削減よりも両国にとって望ましい結果を生むように考えがちである。本稿の結果は、協調的な削減であるよりは、非協調的な削減である方が負の効用をもたらす兵器ストック総量を低水準になる可能性を示した。また解は相対的に安定的といってよく、必ずしも稀に達成されるものでもないことも示された。

上記の結果を導出するためには、現実に比較して、設定を非常に単純化している。例えば、本稿のモデルではｓの値（「ストック」から受ける負の効用を規定するパラメータ）を０や１など極めて単純にしている。こうした仮定では得られた結論は限定的なケースにすぎない。情報構造の仮定からは、両国は、当該時点におけるシステムの状態に関する情報を、完全に把握していることになるが、各国で透明性が異なり、feedback 型の情報構造を前提にするのは現実には難しい。軍縮・軍備管理問題では、透明性が重要な役割を果たしていることが、改めて示された。

対称的な２国、非対称的な２国について協調解、非協調解を分析するため、今後の軍縮・軍備管理に関する分析の視点を提供できると考える。特に非協調解の方が協調解よりも兵器ストック総量を減らす可能性が示唆された場合、非常に興味深い結果といえる。これは条約や協定の締結（あるいは事前コミットメント）によって総量規制することが必ずしも必要ないことを意味する。

注

⑴　各プレイヤーが、すべての時点において、当該時点におけるシステムの状態に関する完全な情報を持っており、部分ゲーム完全性が満たされる（但し、その時点における情報のみ）。したがって、プレイヤーは操作変数（ここではＥ）の時間経路にコミットする必要がないという利点がある。

⑵　ｔ時点の戦略がｔ時点の状態変数の値のみに依存し、ｔには依存しないような場合、このような戦略を Markovian と呼ぶ。

⑶　２次関数と仮定するとその形状から分析が極めて分かりやすく、最大値あるいは最小値を一階条件のみで特定化できるという利点がある。また、

自国の独立維持のため、ある程度の兵器ストックは必要だが、過剰は負の効用を与えるという現実に近い仮定も設定しやすい。

(4)　以下では取り扱いが比較的簡単な Fershtman and Nitzan（1991）のモデルの利得関数と遷移式を参考にした。

(5)　これらの仮定は関数の形状を明確にするためである。この仮定により、兵器生産量や兵器ストック量の過剰蓄積は経済厚生に負の影響を与えることをモデルに組み込むことができる。

(6)　$\sqrt{\ }$の部分を h(M) で代用した。

参考文献

Bellman, Richard, 1957, Dynamic Programming, Princeton University Press.

Boulding, K.E., 1962, Conflict and defense: A general theory（Harper and Row, New York）.

Brito, D.L., 1972, "A Dynamic Model of Armament Race." International Economic Review, 13（2）, 359-375.

Fershtman, C. and S. Nitzan, 1991, "Dynamic Voluntary Provision of Public Goods, European Economic Review 35, 1057-1067.

Intriligator, M.D., 1975, Strategic considerations in the Richardson model of arms races, Journal of Political Economy 83, 339-353.

Intriligator, M.D., and D.L. Brito, 1976a, Strategy, arms races, and arms control, in: J.Y Gillespie and D.A. Zinnes, eds., Mathematical systems in international relations research（Praeger, New York）173-189.

Intriligator, M.D., and D.L. Brito, 1976b, Formal models of arms races, Journal of Peace Science 2, 77-88.

Kamien, Morton I. and Nancy L. Schwartz, 1991, Dynamic Optimization, second edition, Amsterdam: North-Holland

Leonald, Daniel and Ngo van Long, 1992, Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics, Cambridge University Press.

McGuire, M.C., 1965, Secrecy and the arms race（Harvard University Press, Cambridge, MA）.

Rapoport, A., 1957, Lewis F. Richardson's mathematical theory of war Journal of Conflict Resolution, 249-304.

Richardson, LE, 1960, Arms and Insecunty（Box wood Press, Pittsburgh, PA）.

Sandler, T. and Hartley, K., 1995, The Economics of Defense. Cambridge

University Press（深谷庄一監訳『防衛の経済学』日本評論社）.
Schelling, T.C., 1966, Arms and influence (Yale University Press, New Haven, CT).
Simaan, M. and Cruz, J.B., Jr., 1973, "A Multistage Game Formulation of Arms Race and Control and Its Relationship to Richardson's model." Modeling and Simulation, 4, 149-53.
Simaan, M. and Cruz, J.B., Jr., 1975, "Formulation of Richardson's model of Arms Race from a Differential Game Viewpoint." Review of Economic Studies, 42 (1), 67-77.

荒井功，1998，『国際関係の戦略とパワー構造』成文堂.
石黒馨，1998，『国際政治経済の理論：覇権協調論の構想』勁草書房.
石黒薫，2007，『入門・国際政治経済の分析』勁草書房.
井上和子，2001，『越境汚染の動学的分析』勁草書房
大住圭介，2003，『経済成長分析の方法』九州大学出版会.
柴田章久・竹田之彦，1997，「経済学における微分ゲーム理論の応用について」，『経済学雑誌』第98巻　第4号，1-22，大阪市立大学.
鈴木基史，2000，『国際関係』東京大学出版会.
吉田和男，1996，『安全保障の経済分析』日本経済新聞社.