

**Article****Fraunhofer Diffraction and Dispersion Relation  
of de Broglie Wave**

Hiizu FUJITA

**Abstract**

Analyses are performed on Shimizu et al's experimental results of the double slit atom interferometer. In their work, ultracold Neon atoms were employed for the atom interferometer. The de Broglie wavelengths for Neon atoms are estimated from the experimental data, by applying the Fraunhofer diffraction theory. The falling velocity of Neon atom is estimated from the experimental data, and the de Broglie equation,  $h/p = \lambda$ , is directly examined by using "optical data" and "particle data". A divergence appeared in the de Broglie relation, and this effect is explained by assuming the  $k$ -linear term in the dispersion relation of the de Broglie wave.

## § 1 Introduction

Young's double slit experiment is very famous, which showed the interference fringes of the light waves<sup>(1)</sup>. The electron double slit experiments were performed extensively, by replacing light quanta to electron beam.

One of the trend of the electron interferometer experiments is to perform "the fundamental experiments on quantum mechanics", by extremely reducing the beam intensity. The electron beam intensity was reduced so low that there was only one electron between the slits and the detector screen at a time. The experimental results showed, clearly, that each electron indicated the particle feature by hitting the screen at very single spot. However, the interference fringes showed up at last, when the spot data were accumulated. Thereby, electron showed the particle features and the wave characteristics.

Another trend of the interferometer experiments is to employ heavy particles. Neutron interferometer is the most popular tool for the heavy particle interferometer physics. This trend is further stepped forward to use heavy atoms rather than neutrons. It became popular to study the wave properties of atom by employing "Atom Interferometer". In these experiments, "the interference fringes" are observed just as is the case of Young's experiment<sup>(2)(3)</sup>.

One of the difficulties of the "Atom Interferometer" experiments is to achieve long de Broglie wavelength. Since the wavelength of the de Broglie Wave is expressed as  $\lambda = h/p$ , where  $p$  is the momentum of the particle, the important point of the experiment is to slow down the velocity of the particle.

Recently, Fujio Shimizu, Kazuko Shimizu and Hiroshi Takuma have observed the interference fringes by using Neon atom interferometer<sup>(4)</sup>. In the present work, their results are analyzed by employing the principles of optics.

## § 2 Experimental Results

Figure 1 shows the schematic layout of the “Atom Interferometer”. Shimizu et al succeeded in to obtain the de Broglie wave of very long wavelength, by using ultracold Neon atoms as a source. They employed the gravitational field to accelerate atoms. The estimated falling velocity is, typically, 1.25 m/sec at the double slit and it is 1.93 m/sec at the detector screen. The slit width is  $2\mu\text{m}$ . and the separation distance between the two slits is  $6\mu\text{m}$ .

In Fig. 2, Shimizu et al’s results are shown. Their original data are represented by the dot lines, due to the digital detecting system. However, the reproduced data are shown by the smooth curves for reader’s convenience. The numerals in Fig. 2 are the transit time for atoms to fall from the source to the detector. The arrows in Fig. 2 indicate the limiting position of Fraunhofer diffraction. These positions

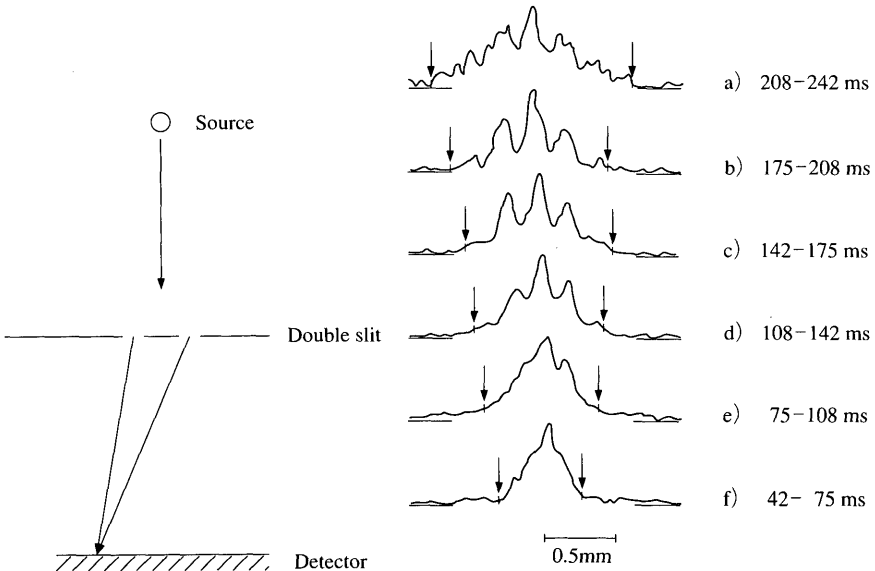


Fig. 1 Schematic layout of the Atom Interferometer.

Fig. 2 Experimental results of Neon Atom Interferometer; the fringes and the Fraunhofer diffraction of de Broglie waves are shown.

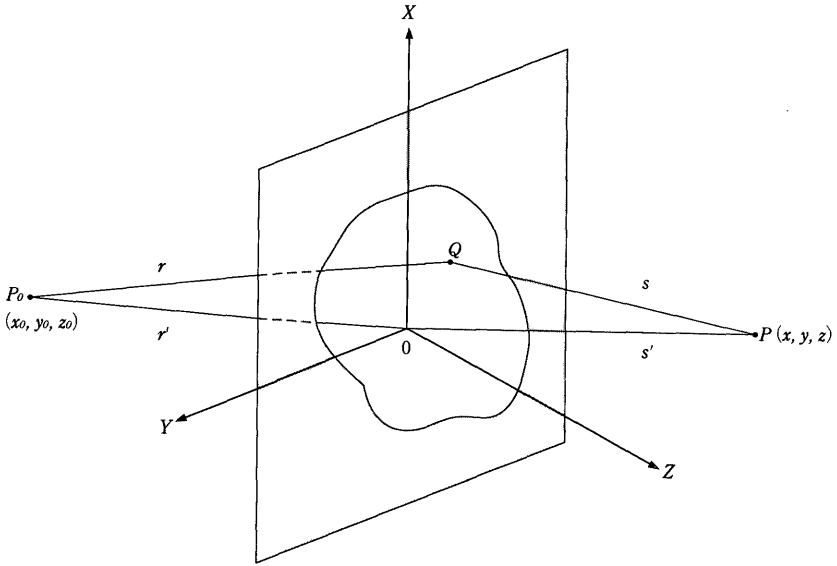


Fig. 3 Geometrical relations of the Fraunhofer diffraction at the opening.

will be discussed with relation to the diffraction theory.

### § 3 The analyses of the experimental results

Figure 3 shows the geometrical relations for the Fraunhofer diffraction to occur. In Fig. 3,  $P_0$  is the point light source and  $P$  is the observation point. Let  $l_0 = -x_0/r'$ , and  $l = x/s'$ , then a parameter  $p$  is defined as  $p = l - l_0$ . The parameter  $p$  can be reduced to  $p = l$ , when  $P_0$  is set at the point facing to the center of the opening, i. e.  $x_0 = 0$ . Then the variable  $w$ , which is important for the Fraunhofer diffraction theory, is represented by  $w = kpa$ , where  $k = 2\pi/\lambda$  and  $a$  is the slit width.

Figure 4 shows the Fraunhofer diffraction at a rectangular opening<sup>(5)</sup>, where  $w = kpa$ , and the arrow shows the point where  $w = \pi$ , and  $(\sin w/w)^2$  becomes zero. This point, shown by the arrow, corresponds to the point shown by the arrows in Fig. 2.

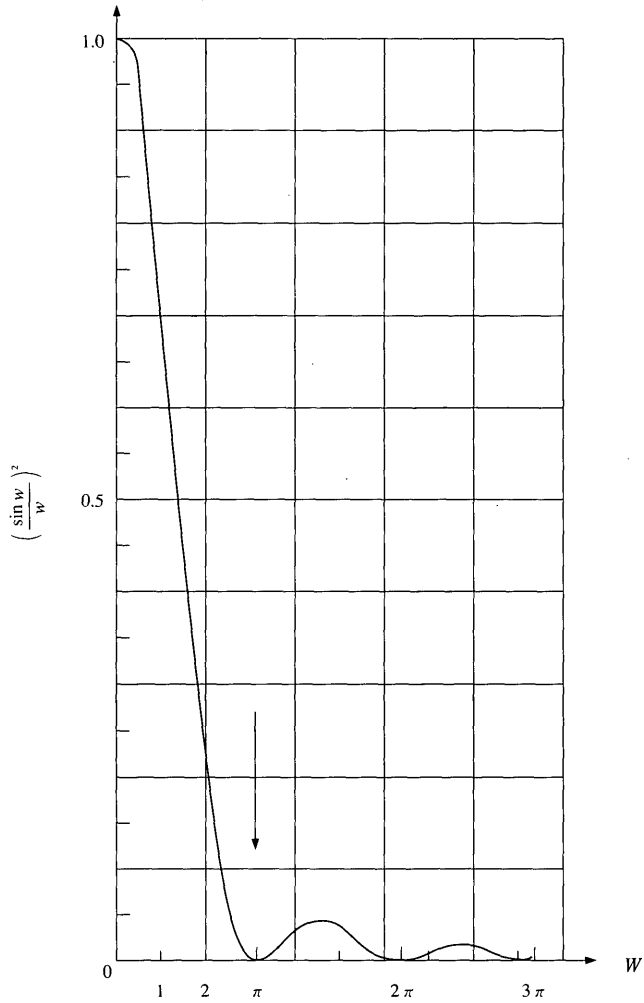


Fig. 4 Theoretical Fraunhofer diffraction intensity at a rectangular opening.

As is shown in Fig. 1, the slit width is  $2\mu\text{m}$ , and as we will see later, the de Broglie wavelength is about  $200 \text{ \AA}$ . Then the slit should not be regarded as a line source; since the slit width is about 100 times larger than the de Broglie wavelength. Therefore, the  $2\mu\text{m}$  wide slit should be regarded as an “opening”, rather than a slit. This is the point that the Fraunhofer diffraction comes in to their experiments.

Table 1 shows the optical results. The 1st column shows the half width of the Fraunhofer diffraction,  $x$ ; where the condition  $w = kpa = \pi$  is satisfied. The de Broglie wavelengths,  $\lambda$  (optical), are shown on the 2nd column; the wavelength is calculated by using the relation  $kpa = \pi$ , where  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $p = x/s'$  and  $a$  is  $2\mu\text{m}$ . In the 3rd column, the same de Broglie wavelengths are shown in  $\text{\AA}$  unit; in order to appeal the optical reality. The 4th column shows the particle velocity,  $v$  (opt), which is deduced from the de Broglie wavelength by using the relation of  $v = h/m\lambda$ . The velocity ranges from 76.60 to 194.25 in cm/sec unit.

Table 2 shows the falling velocity of Neon atom,  $v$  (particle), at the detector screen. The velocity is calculated by assuming the free falling of atoms by gravity. When Neon atom has initial velocity,  $v_0$ , the distance of the falling becomes  $S = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t$ . Thus  $v_0 = \frac{S}{t} - \frac{1}{2}gt$ . By combining the  $v_0$  with  $v = v_0 + gt$ , the final equation for  $v$  becomes,  $v = \frac{S}{t} + \frac{1}{2}gt$ . Therefore, the particle velocity at the detector screen can be obtained by using the transit time ( $t$ ) and the distance ( $S$ ) from the source to the detector. The 1st column in Table 2 shows the transit time, and the 2nd, 3rd, 4th columns are the intermediate stages of the calculation. The particle velocity,  $v$  (part), is shown in the 5th column. The velocity ranges from 192.51 to 354.28 cm/sec.

Table 3 summarizes the velocity of Neon atom at the detector screen. The 1st and the 2nd columns are the reproduction of Table 1 and Table 2. The 1st column is reproduced from the 4th column of the Table 1,  $v$  (opt), and the 2nd column is reproduced from the 5th column of the Table 2,  $v$  (part). The ratio of the two velocities,  $v$  (part)/ $v$  (opt), is shown on the 3rd column in Table 3. The ratio is, roughly speaking, about 1.8.

**Table 1** Experimental results of de Broglie wavelength, which are obtained by the Fraunhofer diffraction shown in Fig. 2.

	$x$ ( $10^{-2}$ cm)	$\lambda$ (opt) ( $10^{-6}$ cm)	$\lambda$ (Å)	$v$ (opt) (cm/sec)
a)	7.30	2.584	258.4	76.60
b)	5.76	2.038	203.8	97.12
c)	5.38	1.904	190.4	103.96
d)	4.61	1.631	163.1	121.36
e)	4.23	1.497	149.7	132.23
f)	2.88	1.019	101.9	194.25

**Table 2** Falling velocity of Neon atom (group velocity).

	$t$ (sec)	$s/t$	$490t$	$v_0$	$v$ (part) (cm/sec)
a)	0.225	84.00	110.25	-26.25	194.25
b)	0.192	98.43	94.08	4.35	192.51
c)	0.158	119.62	77.42	42.20	197.04
d)	0.125	151.20	61.25	89.95	212.45
e)	0.092	205.43	45.08	160.35	250.51
f)	0.058	325.86	28.42	297.44	354.28

( $S=18.9$ cm)

**Table 3** Experimental results of the group velocity,  $v$ (part), and the phase velocity,  $v$ (opt).

	$v$ (opt)	$v$ (part)	$v$ (part)/ $v$ (opt)
a)	76.60	194.25	2.535
b)	97.12	192.51	1.982
c)	103.96	197.04	1.895
d)	121.36	212.45	1.750
e)	132.23	250.51	1.894
f)	194.25	354.28	1.823

It is felt that  $v$  (opt) is related with the phase velocity, and  $v$  (part) is related with the group velocity. The author, however, does not step further into the argument at this moment, and this point will be discussed more in detail in §4.

Table 4 shows the values of  $h/p$  (part), which are calculated by using the  $v$  (part) ; shown in the 5th column of Table 2. Let us call these values as the “particle point of view de Broglie wavelength”. These are shown in the 2nd column. On the 3rd column,  $\lambda$  (opt) is reproduced from the 2nd column in the Table 1. Let us call these as “the wave point of view de Broglie wavelength”. The question is “How do they meet ?”

Figure 5 shows the plot of the data, shown in the 2nd and 3rd column in Table 4. The plot is represented by the open circles, (○). The labels, a), b), c), d), e) and f) represent the order of the data shown in the Fig. 2 ; which is the reproduction of the original data shown in the Ref. 4. As can be seen in the Fig. 5, the plot does not coincide with the straight line of  $h/p = \lambda$ . However, if the values of  $h/p$  (part) are multiplied by a factor 1.8, then the results fit well to the line of  $h/p = \lambda$  ; which are shown by the closed circles (●). The factor 1.8 has a root in Table 3, 3rd column, and this point will be discussed more in detail in §4. This correction suggests that the de Broglie relation,  $h/p = \lambda$ , holds for the phase velocity ; not for the group velocity.

Figure 5 indicates another important point, i. e., the data of a), b), c) strongly deviate from the straight line. The data suggest that there is a divergence at around  $h/p = 1.8 \times 10^{-6} \text{cm}$ , as indicated by a broken line. As will be discussed in detail in §4, the data of a), b), c), which are represented by a horizontal line of  $h/p = \text{constant}$ , are related with the  $k$ -linear dependence to  $\omega$ . On the other hand, the normal data, d), e), f), are related to the  $k^2$  dependence to  $\omega$ .

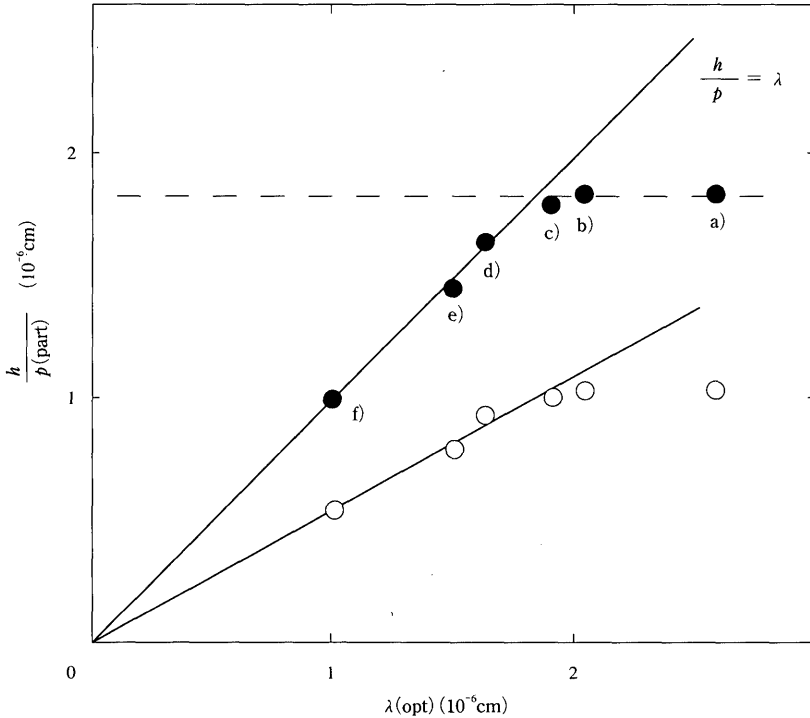
Table 5 indicates the calculated results of  $\omega$  by  $k$  and  $k^2$ . The wave number,  $k$ , is deduced from the “optical wavelength”,  $\lambda$  (opt), and the results are shown on the 4th and 5th columns.

Figure 6 shows the results shown in the Table 5. It is shown that the points a), b), c) are represented by the  $k$ -linear relation, and d), e), f) are represented by the



**Table 4** Two kinds of de Broglie wave ; which are deduced from the "particle point of view",  $h/p$  (part), and from the "optical point of view",  $\lambda(\text{opt})$ .

	$v$ (part) (cm/sec)	$h/p$ (part) ( $10^{-6}\text{cm}$ )	$\lambda(\text{opt})$ ( $10^{-6}\text{cm}$ )
a)	194.25	1.019	2.584
b)	192.51	1.028	2.038
c)	197.04	1.004	1.904
d)	212.45	0.931	1.631
e)	250.51	0.790	1.497
f)	354.28	0.558	1.019



**Fig. 5** Relation between the two de Broglie wavelength ; one deduced from the "particle point of view",  $h/p$  (part), and another from the "optical point of view",  $\lambda(\text{opt})$ .

bilinear relation.

## § 4 Discussions

As shown in Fig. 5, the plot of the data (○), which is a combination of  $h/p$  (part) and  $\lambda$  (opt), does not meet with the straight line of  $h/p=\lambda$ . The reason for this discrepancy could be as following :

The de Broglie relation,  $h/p=\lambda$ , can be modified into the dispersion relation. By using the equations  $h/p=\lambda$ ,  $p=mv$ ,  $v=\nu\lambda$ ,  $\omega=2\pi\nu$ , and  $k=2\pi/\lambda$ , one gets to  $\omega=\frac{hk^2}{2\pi m}$ . Therefore, the phase velocity,  $v$  (ph), is obtained as  $v$  (ph)  $=\frac{\omega}{k}=\frac{hk}{2\pi m}$ . On the other hand, the group velocity,  $v$  (gr), is expressed as  $v$  (gr)  $=\frac{d\omega}{dk}=\frac{hk}{\pi m}$ . Thus, there is a factor of 2 difference between the phase velocity and the group velocity ;  $v$  (gr)  $=2v$  (ph). There is about factor of 1.8 difference between the “optical velocity”,  $v$  (opt), and the “particle velocity”,  $v$  (part) ; as is shown in the 3rd column in Table 3. Thus it seems to be natural to consider that the optical velocity,  $v$  (opt), is related to the phase velocity, and the particle velocity,  $v$  (part), is related to the group velocity. The modified data (●) meet nicely with the  $h/p=\lambda$ , line, when the data (○) are multiplied by the factor 1.8. Therefore, it appears natural to regard that the de Broglie relation,  $h/p=\lambda$ , is fulfilled when the phase velocity is put into  $p=mv$ .

Figure 5 indicates, also, that there is a divergence in  $h/p=\lambda$  relation. This divergence can be explained as following :

Let  $h/p=\lambda_0$ , where  $\lambda_0\cong 1.8\times 10^{-6}$  for the present case. Then again by using the relations  $p=mv$ ,  $v=\nu\lambda$ ,  $\omega=2\pi\nu$  and  $k=2\pi/\lambda$ , one gets  $\omega=\frac{hk}{m\lambda_0}$ . The phase velocity,  $v$  (ph), becomes  $v$  (ph)  $=\frac{\omega}{k}=\frac{h}{m\lambda_0}$ . The group velocity,  $v$  (gr), becomes this time  $v$  (gr)  $=\frac{d\omega}{dk}=\frac{h}{m\lambda_0}$ . Therefore, the divergence in  $h/p=\lambda$  relation has a root in the  $k$ -linear dependence to  $\omega$ .

So this is the branch point. There is no divergence if one approve the de Broglie relation,  $h/p=\lambda$ , a priori, and deduce  $v$  (opt) from the optical data,  $\lambda$  (opt). However, once one tries to examine the de Broglie relation by using a combination

Table 5 Wave number dispersion of de Broglie wave.

	$\lambda(\text{opt})$ ( $10^{-6}\text{cm}$ )	$k(\text{opt})$ ( $10^6$ )	$k^2(\text{opt})$ ( $10^{12}$ )	$\omega(k)$ ( $10^{11}$ )	$\omega(k^2)$ ( $10^{11}$ )
a)	2.584	2.430	5.909	2.646	1.861
b)	2.038	3.082	9.501	3.356	2.993
c)	1.904	3.299	10.859	3.592	3.430
d)	1.631	3.852	14.839	4.194	4.675
e)	1.497	4.197	17.615	4.569	5.549
f)	1.019	6.165	38.014	6.713	11.975

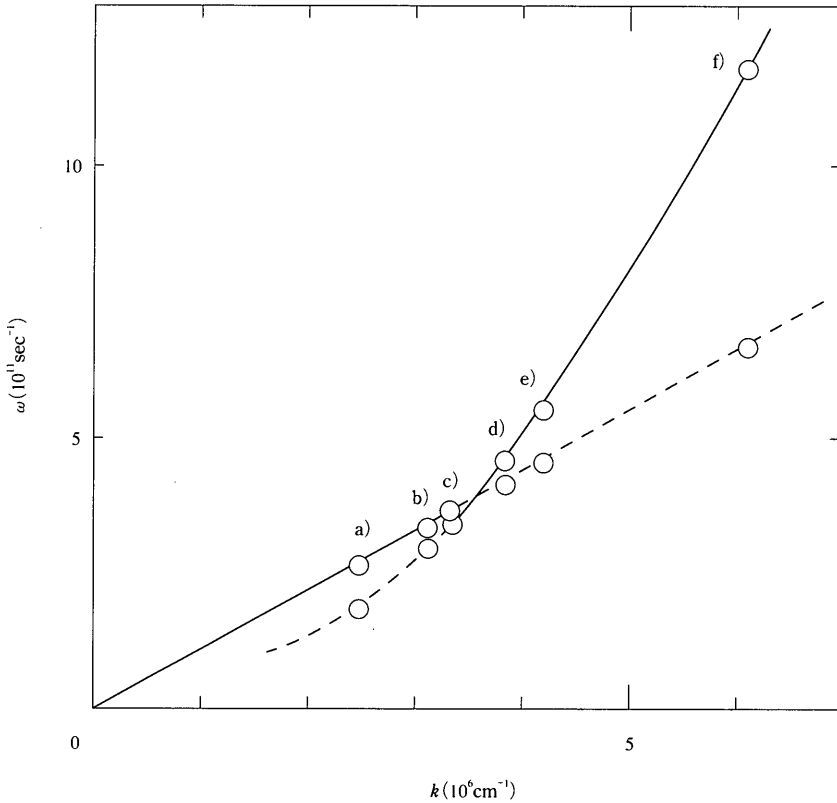


Fig. 6 Wave number dispersion of the de Broglie wave, which are shown in Fig. 5.

of  $h/p$  (part) and  $\lambda$  (opt), the divergence appears.

It is hard to imagine that the measurements for a), b) and c) have some error. This is because, for a), b), c) cases, the interference fringes show up nicely, and there is no difficulty to define the Fraunhofer diffraction point. Moreover, the points for d), e), f) fit nicely to the  $h/p = \lambda$  line. Thus it will be natural to conclude that there is a  $k$ -linear dependence for the de Broglie wave, if no experimental error could be found. The author has no idea whether this divergence is a specific case for the mesoscopic phenomena.

It would not be plainly evident that de Broglie wave should show the Fraunhofer diffraction. This possibility should be examined by looking into the Kirchhoff's diffraction theory, and the related discussion will be published on this journal later. However, this possibility can be thought, intuitively, to be positive, when one thinks of the reality that there are so many electron diffraction experiments are going on in the world. Nevertheless, it would be hard to believe, until it is proved by an experiment that de Broglie wave can be chopped into the Fresnel zones. Another words, this means we can say in this way that "the material wave" can travel through not only two slits, but it can pass through hundreds of slits at the same time.

Interference and diffraction are different matter. The double slit experiment does not separate the two. It is well known that one of the most important principle of quantum mechanics is the principle of superposition. However, the generation of interference fringes does not guarantee that the related waves should follow a diffraction rules. It is at this point that the Shimizu et al's experiment makes a good sense.

By assuming that the position shown by arrows in Fig. 2 has the same origin to the arrow shown in Fig. 4, one can calculate the de Broglie wavelength. It turned out that the de Broglie wavelength of this case is about some hundreds angstrom. Therefore, this phenomena, shown by the experiments, are the mesoscopic application of quantum mechanics.

In case of the electromagnetic wave, the existence of Fraunhofer diffraction is

guaranteed by Kirchhof's theory. The theory also contains Huygens-Fresnel principle. Therefore, to observe Fraunhofer diffraction of de Broglie wave means that de Broglie wave does propagate by the famous secondary wavelet generation principle; just as is the case of electromagnetic wave.

## § 5 Conclusions

It is shown that the atom interferometer experiment is a mesoscopic phenomena, and de Broglie wave shows Fraunhofer diffraction, just like electromagnetic wave does.

It is suggested that de Broglie wave propagates by generating secondary wavelets, which is known as Huygens-Fresnel principle. The inclination factors for this propagation can be calculated from the experimental data.

The atom interferometer experiment, which was performed by Shimizu et al, evidenced the existence of the Fraunhofer diffraction phenomena, needless to say the interference phenomena, of de Broglie wave. This conclusion means that it will be able to perform such an experiment, in the future, as to chop up the de Broglie wave by using a Fresnel zone mask and to observe the interference phenomena of the secondary wavelets.

It is shown that the de Broglie wave relation holds very well for the cases of d), e), f) measurement. Thus the de Broglie relation is supported directly by the experiment. On the other hand, it is found that a strange divergence appeared for a), b), c) cases. It will be necessary to perform a critical experiment to examine this conclusion.

## Acknowledgements

The author is cordially thankful to professor Masaki Shinada, University of Electro-Communications, Tokyo, for his letting the author have a copy of Fujio Shimizu, Kazuko Shimizu and Hiroshi Takuma's paper.

(March 14, 1993)

### References

- (1) Max Born and Emil Wolf : “ Principles of Optics ” Pergamon Press, 1965, 3rd Edition, §7. 3, p. 260.
- (2) O. Carnel and J. Mlynek : Phys. Rev. Lett. 66 (1991), 2689.
- (3) D. W. Keith, C. R. Ekstrom, Q. A. Turchette and D. E. Pritchard : Phys. Rev. Lett. 66 (1991), 2693.
- (4) F. Shimizu, K. Shimizu and H. Takuma : Phys. Rev. A (1992), R. 17.
- (5) Max Born and Emil Wolf : *ibid.*, p. 393.

[訳 文]

# ドブroy波のフラウンホーファー回折と 波数分散

藤 田 秀

<目 次> 概 要

§ 1 序 論

§ 2 実験結果

§ 3 実験結果の解析

§ 4 討 論

§ 5 結 論

## 概 要

F. Shimizu, K. Shimizu, H. Takuma によってなされた、ダブルスリット・ネオン原子干渉計実験の結果を検討した。ネオン原子のドブロイ波に対し、ブラウンホーファー回折が起きているとして、実験データからドブロイ波の波長を求めた。この「波動的解析」により求められたネオン原子のドブロイ波の波長と、「粒子的解析」から求められた運動量とを用いて、ドブロイ波の公式( $h/p = \lambda$ ) が成り立っているかどうかを検討した。その結果、ドブロイ波のデータに発散が現われた。この結果を用いて、ドブロイ波の分散を求めると、分散には波数の1次に比例する部分と、波数の2次に比例する部分とがあることが判った。

## §1 序 論

ダブルスリットを用いたヤングの干渉実験は、光の波動性を示す実験として有名である。<sup>(1)</sup> 光ばかりでなく、電子線を用いた「ダブルスリット」の実験は、電子の波動性を調べるものとして、盛んに行なわれている。

この「電子干渉計」の実験の一つの方向は、電子線の強度を極端に下げるものである。したがって、スリットとスクリーンの間には、電子がいつも1つしか存在しなくなる。この種の実験は、電子の粒子性と波動性を調べる「量子力学的基礎実験」として、盛んに行なわれた。その結果、電子は、スクリーン上に1個の点としてその到着を表現することが判った。しかし一方、多数回のぼらついた点のデータを積み重ねると、「干渉縞」が現われた。すなわち、電子は可干渉性を持った波動としての、統計的性質を持つことが判ったのである。

「干渉計」の実験のいま一つの方法は、粒子の質量が、電子よりも重いものを用いる方へと進んでいる。この方向としては、中性子干渉計の実験が有名である。最近ではこれを更に進めて、原子の波動性を調べる「原子干渉計」の実験が盛んである。ここでも、光によるヤングの実験のように、「干渉縞」が検出さ



れるまでになった。<sup>(2)(3)</sup>

「原子干渉計」の実験のポイントの一つは、いかにして波長の長いドブロイ波を得るかである。これは、ドブロイ波の波長は $\lambda = h/p$  (記号は習慣的用法による) となるので、いかにして小さい運動量を得るかにかかっている。言い換えれば、粒子の速度をいかにして遅くするかである。

最近, Fujio Shimizu, Kazuko Shimizu, Hiroshi Takuma により, 超低速のネオン原子を用いたダブルスリットによる「原子干渉計」の実験結果が発表されたので、その結果を「波動としての見地」から検討する。<sup>(4)</sup>

## § 2 実験結果

Fig. 1 にダブルスリットによる「原子干渉計」の概念図を示す。Shimizu 等は、ほとんど停止した超低速のネオン原子を線源とし、「原子の自由落下」により、波長の非常に長いドブロイ波を得るのに成功した。ダブルスリットの開口幅は  $2 \mu\text{m}$ , スリット間隔は  $6 \mu\text{m}$  である。

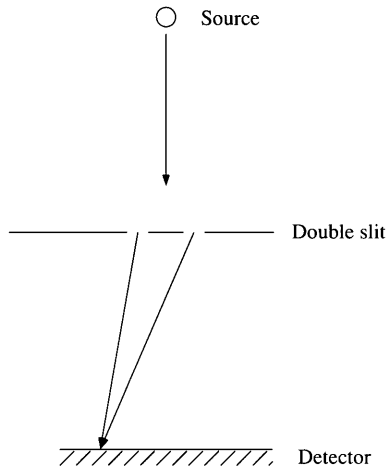


Fig. 1 ダブルスリットによる, 原子干渉計の概念図

Fig. 2 に、彼等の実験結果を再録した。原図はデジタル化された点線で示されているが、見易くするためにスムーズな曲線で再録した。図中の数字は、原子の落下開始から、検出器に粒子が到着するまでの時間である。図中の矢印の位置は、後で述べるフラウンホーファー回折の、極小点と考えられる位置である。

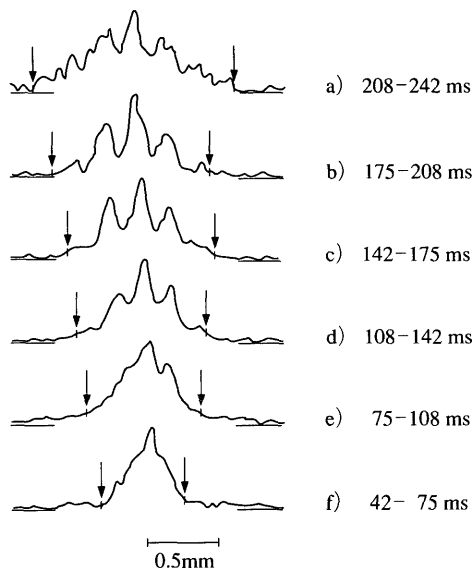


Fig. 2 ネオン原子干渉計による、干渉縞とフラウンホーファー回折の実験結果

### § 3 実験結果の解析

Fig. 3 に、光によるフラウンホーファー回折を解析する際に用いる、幾何学的条件を示す。図中  $P_0$  は点光源、 $P$  は光の検出点である。いま、 $l_0 = -x_0/r'$ 、 $l = x/s'$  とすれば、 $p = l - l_0$  として、 $w = kpa$  と書ける。(もし  $P_0$  を原点の正面にとれば、 $x_0 = 0$  となり、 $p = l$  となる)ただし、 $k = 2\pi/\lambda$ 、 $a$  はスリットの開口幅である。

Fig. 4 に矩形スリットによるフラウンホーファー回折の強度変化の理論的グラフを示す。<sup>(5)</sup> 横軸の  $w$  の  $\pi$  となる所が、 $(\sin w/w)^2$  のゼロとなる所である。こ

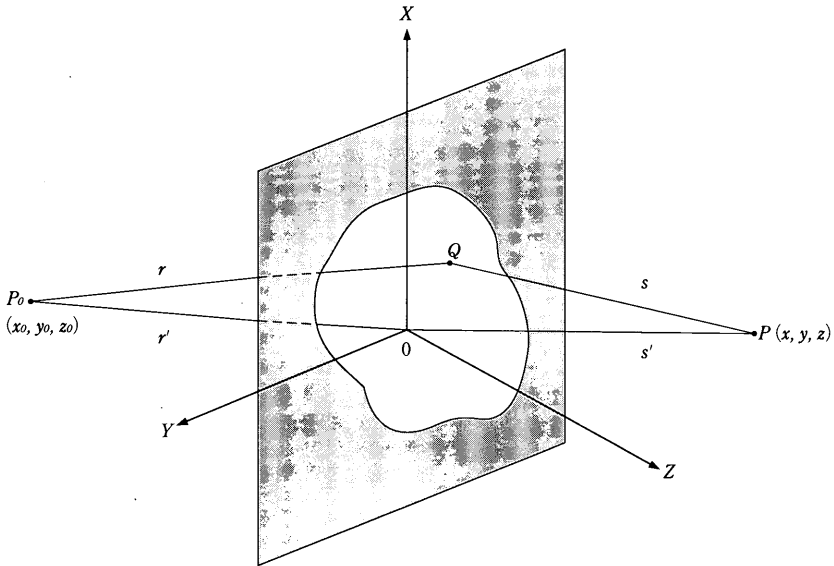


Fig. 3 開口部によるフラウンホーファー回折の幾何学的条件図

の点が, Fig. 2 の中で矢印で示した位置に当たると考える。

Fig. 1 に示したように, スリットの幅は $2\mu\text{m}$ である。後にのべるように, ドブレイ波の波長は約 $200\text{\AA}$ になるので, スリット幅は波長の100倍に当たる。したがって, このスリットは線光源と見なすことは出来ない。これは, フラウンホーファー回折の理論で扱う「開口部」と考えるべきである。

Table 1 に実験データの解析結果を示す。第1列 ( $x$ ) は, Fig. 2 中に矢印で示した回折像の半幅の位置である。また第2列は, これを用いてフラウンホーファー回折の理論により算出されたドブレイ波の波長,  $\lambda(\text{opt})$ , である。ただし, 算出には, 前に述べたように,  $w = kpa = \pi$ ,  $p = x/s'$ ,  $k = 2\pi/\lambda$ などを用いて,  $\lambda(\text{opt})$  を求めた。こうして求めたドブレイ波の波長,  $\lambda(\text{opt})$  は, 第3列に $\text{\AA}$ 単位で示したように, 最高 $258.4\text{\AA}$ にもなっており非常に長い。第4列には, ドブレイ波の波長からドブレイの式 ( $h/mv = \lambda$ ) を用いて逆に速度 ( $v(\text{opt})$ )

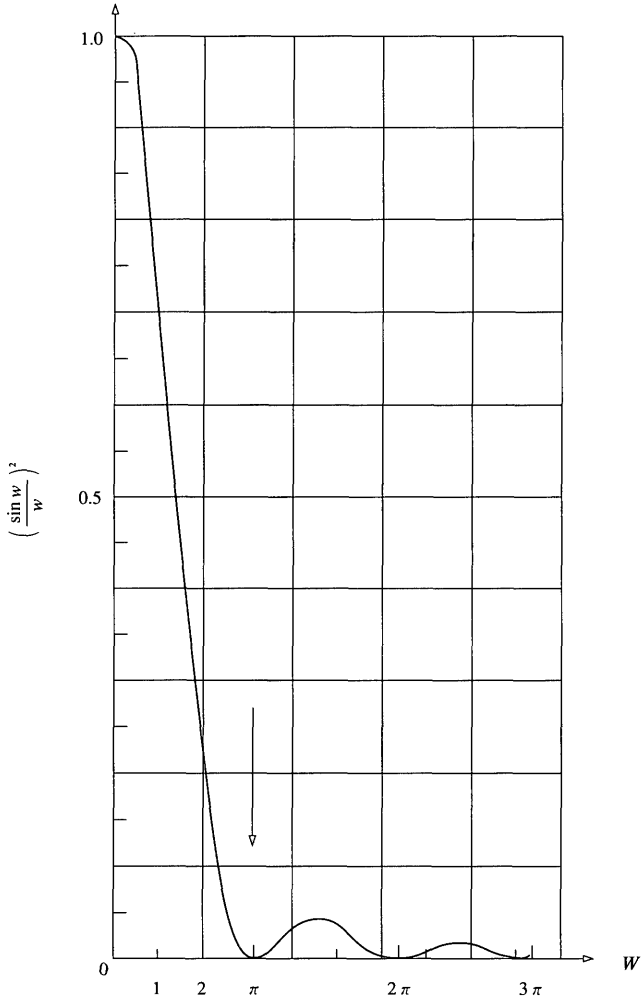


Fig. 4 矩形スリットによるフラウンホーファー回折の光の強度分布

Table 1 フラウンホーファー回折から求めた  
ドブロイ波長

	$x$ ( $10^{-2}\text{cm}$ )	$\lambda(\text{opt})$ ( $10^{-6}\text{cm}$ )	$\lambda(\text{\AA})$	$v(\text{opt})$ ( $\text{cm/sec}$ )
a)	7.30	2.584	258.4	76.60
b)	5.76	2.038	203.8	97.12
c)	5.38	1.904	190.4	103.96
d)	4.61	1.631	163.1	121.36
e)	4.23	1.497	149.7	132.23
f)	2.88	1.019	101.9	194.25

Table 2 ネオン原子の落下速度 (群速度)

	$t(\text{sec})$	$s/t$	$490t$	$v_0$	$v(\text{part})$ ( $\text{cm/sec}$ )
a)	0.225	84.00	110.25	-26.25	194.25
b)	0.192	98.43	94.08	4.35	192.51
c)	0.158	119.62	77.42	42.20	197.04
d)	0.125	151.20	61.25	89.95	212.45
e)	0.092	205.43	45.08	160.35	250.51
f)	0.058	325.86	28.42	297.44	354.28

(S=18.9cm)

を求めた結果を示す。速度は76.60cm/secから194.25cm/secに達している。

Table 2 にネオン原子の落下速度、( $v(\text{part})$ )を計算から求めた結果を示す。ネオン原子の落下は自由落下であるとして、粒子検出器の位置での速度を求めた。ネオン原子は初速度をもっているものとして、 $S = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t$ とした。したがって、 $v_0 = \frac{S}{t} - \frac{1}{2}gt$ 、 $v = v_0 + gt$ などから  $v = \frac{S}{t} - \frac{1}{2}gt$  として、 $S$  と  $t$  を与えて  $v$  を求めた。ただし、 $S$  は線源と検出器との間の距離、18.9cm、 $t$  は Table 2 の第1列に示した値を用いた。途中計算結果を第2, 3, 4列に示し、最後の結果、 $v(\text{part})$  を第5列に示す。この結果は、文献4中の記述とよく一致する。検出器でのネオン原子の落下速度は、192.51cm/secから354.28cm/secにおよんでいる。

Table 3 に、粒子検出器の点における、ネオン原子の速度をまとめた。これは Table 1 の  $v(\text{opt})$  と、Table の 2 の  $v(\text{part})$  の再録である。波動像から求め

Table 3 群速度 ( $v$  (part)) と位相速度 ( $v$  (opt)) の比 (cm/sec)

	$v$ (opt)	$v$ (part)	$v$ (part)/ $v$ (opt)
a)	76.60	194.25	2.535
b)	97.12	192.51	1.982
c)	103.96	197.04	1.895
d)	121.36	212.45	1.750
e)	132.23	250.51	1.894
f)	194.25	354.28	1.823

Table 4 ドブroy波の関係式のチェック

	$v$ (part) (cm/sec)	$h/p$ (part) ( $10^{-6}$ cm)	$\lambda$ (opt) ( $10^{-6}$ cm)
a)	194.25	1.019	2.584
b)	192.51	1.028	2.038
c)	197.04	1.004	1.904
d)	212.45	0.931	1.631
e)	250.51	0.790	1.497
f)	354.28	0.558	1.019

た速度,  $v$  (opt) と, 粒子像から求めた速度,  $v$  (part) の比は, a), b)を除き, ほぼ1.8前後になっていることが判る.  $v$  (opt) は位相速度を,  $v$  (part) は群速度を表わすと考えられるが, このことについては§4で詳しく議論する.

Table 4 に有名なドブroy波の方程式, ( $h/p = \lambda$ )を検証した結果を示す. これには, Table 2で求めた粒子像によるネオン原子の速度,  $v$  (part), を用いて  $p = mv$  (part) を求め,  $h/p$  (part) を導いた. Table 4の第2列にその結果を示す. 一方, 波動像から求めたドブroy波の波長,  $\lambda$  (opt), を Table 1の第2列から再録した. 問題は, この両者がどの程度一致するかである.

Fig. 5にその検証結果を示す. これには Table 4の第2列と第3列とのデータを用いた. Fig. 5の白丸 (○) がその結果である. 図中 a), b), c), d),

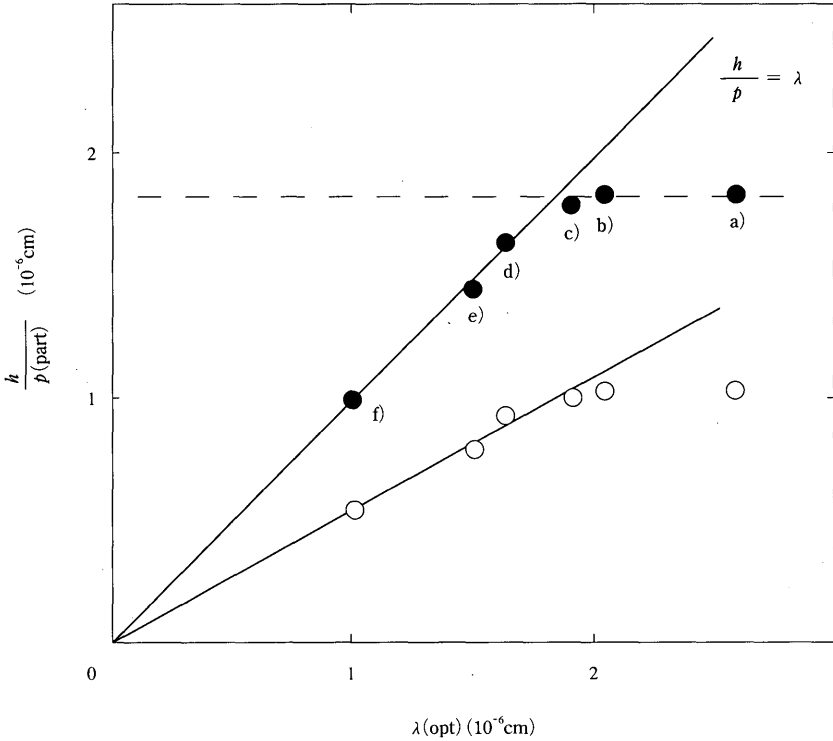


Fig. 5 ネオン原子干渉計の実験データから求めたドブレイ波の関係式の検証

e), f) は, 文献 4 中の Fig. 3 (この論文中の Fig. 2 に再録したもの) に着いている, 実験データの順番を示す記号である.

Fig. 5 から判るとおり, データ (○) は  $h/p = \lambda$  を示す直線から大きく外れている. しかし, Table 3 で示したとおり,  $v(\text{part})/v(\text{opt})$  の比がほぼ 1.8 であったことを用いて, データを 1.8 倍すると, 黒丸 (●) で示したように, よく  $h/p = \lambda$  の直線に乗ってくる. これは, ドブレイの式,  $h/p = \lambda$  において,  $v$  としては  $v(\text{opt})$ , つまり位相速度を用いるべきであるということを示していると考えられる. つまり, ドブレイ波の方程式は, 波動の位相速度について成り立って

いる式であると考えられる。

Fig. 5 は更に重大なことを示唆している。それは a), b), c) によって求められたデータが、ドブroy波の直線式から大きく外れていることである。黒丸 (●) のデータが示すように、 $h/p=1.8 \times 10^{-6}$  cm のあたりに、横軸方向に大きな発散があると考えられる。

§ 4 で詳しく議論するとおり、a), b), c) で示される  $h/p$  = 一定のデータは、 $\omega$ - $k$  の分散が、 $k$  の 1 次によって表わされるためであると考えられる。一方、d), e), f) のデータは、 $k$  の 2 次式によって表わされることがわかる。

Table 5 ドブroy波の分散

	$\lambda(\text{opt})$ ( $10^{-6}$ cm)	$k(\text{opt})$ ( $10^6$ )	$k^2(\text{opt})$ ( $10^{12}$ )	$\omega(k)$ ( $10^{11}$ )	$\omega(k^2)$ ( $10^{11}$ )
a)	2.584	2.430	5.909	2.646	1.861
b)	2.038	3.082	9.501	3.356	2.993
c)	1.904	3.299	10.859	3.592	3.430
d)	1.631	3.852	14.839	4.194	4.675
e)	1.497	4.197	17.615	4.569	5.549
f)	1.019	6.165	38.014	6.713	11.975

Table 5 に、このことを考慮して計算した  $\omega$ - $k$  の分散関係を示す。ここでは  $k$  を求めるにあたり、波動像から求めた波長、 $\lambda(\text{opt})$  を用いた。a), b), c) の  $\omega$  には第 4 列の値を、d), e), f) の  $\omega$  には第 5 列の値を用いるべきである。このことも次の § 4 で詳しく論じる。

Fig. 6 に  $\omega$ - $k$  の分散を示す。ここには  $\omega$  が  $k$  の 1 次に比例する部分と、 $k$  の 2 次に比例する部分とが示されている。これは Fig. 5 からの論理的な帰結であり、その根源はまた、Fig. 2 に示されたデータそのものにある。

## § 4 討 論

Fig. 5 で示したように、 $h/p$  (part) と、 $\lambda(\text{opt})$  とを組合せたデータ (○) は、理想的な直線、 $h/p = \lambda$  からは大きく外れている。この原因は以下のようなためであると考えられる：



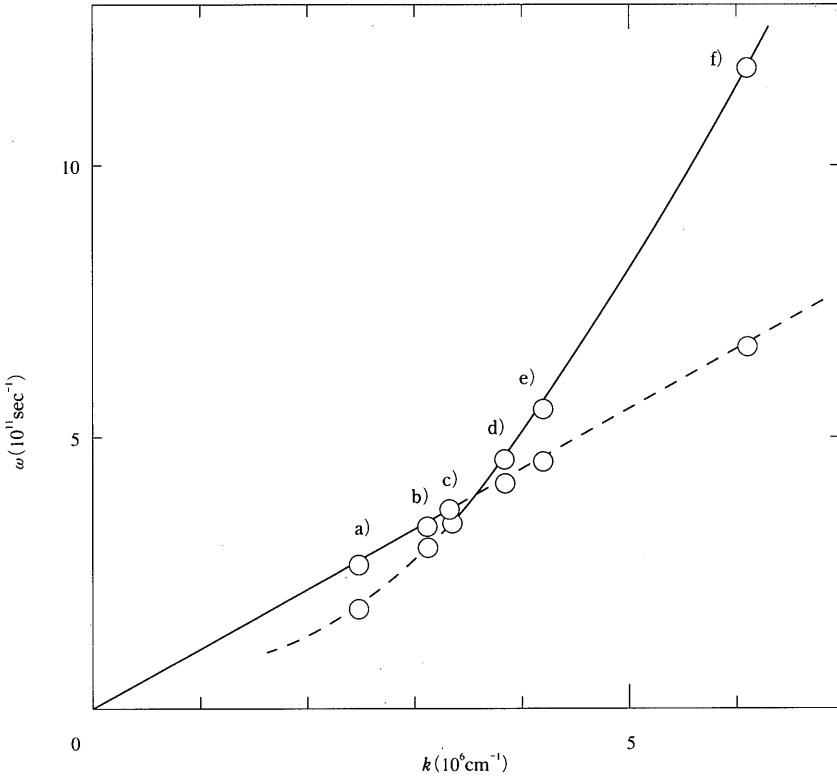


Fig. 6 ネオン原子干渉計の実験データから求めたドブレイ波の波数分散関係

まず、ドブレイ波の式、 $h/p = \lambda$ において、 $p = mv$ と置き、更に波動についていつも成り立つ  $v = \lambda \nu$ 、 $k = 2\pi/\lambda$ を用いると、 $\omega = \frac{hk^2}{2\pi m}$ となる。したがって、位相速度  $v(\text{ph})$ は、 $v(\text{ph}) = \frac{\omega}{k} = \frac{hk}{2\pi m}$ となる。一方、群速度  $v(\text{gr})$ は、 $v(\text{gr}) = \frac{d\omega}{dk} = \frac{hk}{\pi m}$ となる。つまり  $v(\text{gr}) = 2v(\text{ph})$ が成り立つ。すでに Table 3 の第 3 列で示したとおり、 $v(\text{part})/v(\text{opt}) \approx 1.8$ であった。これは、 $v(\text{part})$ は群速度  $v(\text{gr})$ に、 $v(\text{opt})$ は位相速度  $v(\text{ph})$ に、対応すると考えると納得できる。事実、ファクター1.8の補正をおこなったデータ (●)は、d), e), f)については、ドブレイ波の式によく合っていることが、Fig. 5 に示されている。つま

りドブロイ波の式  $h/mv$  には、位相速度を用いるべきであるということ、Fig. 5 は示していると考えられる。

Fig. 5 中には、 $h/p=1.8 \times 10^{-6}$ cm あたりに、横軸方向の発散があるように見られる。この原因は、以下のような事情であるためではないかと考えられる：

いま、発散のある点の  $h/p$  を  $\lambda_0$  とすれば、a), b), c) のデータは、 $h/p = \lambda_0$  と表現される。まえに述べたように、これに  $v = v\lambda$ ,  $k = 2\pi/\lambda$  を組合せると、 $\omega = \frac{hk}{m\lambda_0}$  となる。この場合には、位相速度  $v(\text{ph})$  は  $v(\text{ph}) = \frac{\omega}{k} = \frac{h}{m\lambda_0}$ , 群速度  $v(\text{gr})$  も  $v(\text{gr}) = \frac{d\omega}{dk} = \frac{h}{m\lambda_0}$  となり、両者は一致する。つまりドブロイ波の式の横軸方向の発散は、 $\omega$  の  $k$  依存性が  $k$  の 1 次であることを示していると考えられる。

粒子像から求めた  $v(\text{part})$  を用い、ドブロイ波の式  $h/p = \lambda$  がアприオリに成り立つと考えて、ここからドブロイ波長を計算して来れば、Fig. 5 の発散は当然現われない。しかしこの論文のように、独立に  $v(\text{part})$  と  $\lambda(\text{opt})$  とを求めて、 $h/p(\text{part}) = \lambda(\text{opt})$  が成り立つかどうかを検証しようとするれば、発散が現われる。ここが議論の別れ道である。

a), b), c) の測定が、何かのエラーを含んでいるとは考えにくい。それは Fig. 2 を見れば判るとおり、a), b), c) のデータには干渉縞がよく出ており、フラウンホーファー回折のデータとしても、十分に批判に耐え得ると考えられる。そして何よりも、d), e), f) のデータが  $h/p = \lambda$  の関係をよく満足していることが、データに内部矛盾のないことを示していると考えられる。つまり、この発散の原因は、ドブロイ波に  $k$  の 1 次の波数分散があるためであると考えたい。このような結果は、メソスコピックな領域でのみ現われるものなのかどうか、著者には判らない。

ドブロイ波に、フラウンホーファー回折が起き得るかどうか、という質問に答えるのは簡単ではなかろう。これは、キルヒホッフの回折理論によって検討されるべきことで、後日、本誌にその可能性を議論する予定である。しかし、電子線回折の実験が広く行なわれていることを見れば、その可能性のあることが直感される。

Table 1 に示したように、いま問題にしているドブロイ波の波長は、200 Å 前

後となり非常に長い。これはまさに、マクロとミクロの中間の、メソスコピックな量子力学的現象であると思われる。

電磁波に、フラウンホーファー回折現象が存在することは、キルヒホッフの回折理論によって保証されている。キルヒホッフの理論はまた、ハイゲンスーフレネルの原理に用いられている2次波発生の方向依存係数 (inclination factor) を、理論的に導きだすことが出来る。したがってもし、ドブロイ波にもフラウンホーファー回折の現象が認められるということになれば、ドブロイ波の伝播にも、ハイゲンスーフレネルの2次波発生の原理が当てはまることを意味する。

かくして、「原子干渉計」の実験は、ドブロイ波の「波面分割」の可能性を認めたこととなり、多数のフレネルゾーンに分割する実験が可能であることを示唆している。

## §5 結 論

ネオン原子を用いた「原子干渉計」の実験は、メソスコピックな量子力学的現象の実験であることが示された。また、ドブロイ波にも、電磁波と同じように、フラウンホーファー回折が存在し、ハイゲンスーフレネルの原理による、2次波の発生と、その干渉とが存在することが推論される。

また、ネオン原子による「原子干渉計」の実験は、ドブロイ波も「波面分割」が可能であることをしめした。したがって、将来ドブロイ波のフレネルゾーン分割が実現されれば、2次波間の干渉が、直接見られることとなろう。

ドブロイ波のフラウンホーファー回折から求めた回折波長と、粒子像から求めたドブロイ波長は、d), e), f)のデータでは、よく理論式を満足した。したがって、有名な関係式、 $h/p=\lambda$ を直接実証した。しかし一方では、a), b), c)のデータには、不思議な発散のあることが示された。その原因は、もし実験のエラーによるものでなければ、本質的なものである。なぜならば、本論文ではデータに忠実な解析を行なっただけであり、どこにも近似計算などによる誤差の入る余地はない。この重要な結論を再確認するために、同様な実験が追試

されることが望ましい。

### 謝 辞

Fujio Shimizu, Kazuko Shimizu, Hiroshi Takuma による, ネオン原子を用いた原子干渉計の実験の存在を教えてください, 電気通信大学の品田正樹教授に感謝します。

(1993年 3月14日 記)

### 〔参照文献〕

- (1) Max Born and Emil Wolf : “ Principles of Optics ” Pergamon Press, 1965, 3rd Edition, § 7. 3, p. 260.
- (2) O. Carnel and J. Mlynek : Phys. Rev. Lett. 66 (1991), 2689.
- (3) D. W. Keith, C. R. Ekstrom, Q. A. Turchette and D. E. Pritchard : Phys. Rev. Lett. 66 (1991), 2693.
- (4) F. Shimizu, K. Shimizu and H. Takuma : Phys. Rev. A (1992), R. 17.
- (5) Max Born and Emil Wolf : *ibid.*, p. 393.