

Article

On de Broglie Wave

Part I Partially Coherent de Broglie Wave

Hiizu FUJITA

CONTENT Part I Partially Coherent de Broglie Wave

Abstract

§ 1 Introduction

§ 2 Experimental Results

§ 3 The Analyses of the Experimental Results

§ 4 Discussions

§ 5 Conclusion

Abstract

The analysis is performed on the experimental data of the Atom-Interferometer, which are obtained by Shimizu et al. They employed very slow Neon atom beam for the Young type double slit diffraction-interferometer. It is noticed that the interference pattern of the atom beam shows a typical partially coherent features.

Nevertheless, it appears that quantum theorists are not good at the partially coherent optics, and they calculate the interference fringe pattern by using simple completely coherent beams. It is worthwhile, therefore, to analyze the experimental data by employing more realistic assumptions. It turned out that the de Broglie wave of the atom beam is partially coherent, and the degree of coherence is obtained from the analysis.

§ 1 Introduction

The Young's double slit experiment is very famous.⁽¹⁾ It shows the interference fringe pattern, and demonstrates the wave character of light. Ever since Dr. Louis Victor Pierre Raymond de Broglie discovered the wave character of electron, the efforts were concentrated to observe the interference fringes of electron beam. The efforts were developed to such an extent as to observe the interference fringes of the "Atom-Wave"⁽²⁾⁽³⁾.

The atom-wave interference fringes were observed by Shimizu et al, where they employed Neon atoms and a set of double slit.⁽⁴⁾ The experimental results are analyzed from the Fraunhofer diffraction point of view, and the de Broglie wave equation is directly examined.⁽⁵⁾

Generally speaking, however, diffraction and interference is a different matter. In the previous work,⁽⁵⁾ the author shows that the de Broglie wave of Neon atoms does perform diffraction. To the author's surprise, the diffraction of the de Broglie wave obeyed the Fraunhofer theory. It is foreseen that the de Broglie wave will satisfy the Fresnel's diffraction theory and Huygens-Fresnel principles, if the observation will be performed with higher accuracy.

It is needless to say, to the author's opinion, that there is no necessity nor obvious reasons for the Neon de Broglie wave to obey the diffraction theory of the electromagnetic wave. This is because, the electromagnetic wave is a "real" vector wave, while the de Broglie wave is a "complex" wave.

De Broglie showed the relationship between the wavelength of the wave and the momentum of a particle. However, strange thing happens when one release the condition on the wave velocity.⁽⁶⁾ Theories tell us that the de Broglie wave is valid only if the wave velocity is equal to the light velocity.⁽⁷⁾⁽⁸⁾ But, would not be it strange to assume that the de Broglie wave propagates with the light velocity, even when atoms

are “falling freely” from the source very slowly?

It is suggested in this article that the de Broglie wave has a limited coherence length, just as a light quantum. This point will be discussed in detail in a coming article.

§ 2 Experimental Results

Figure 1 shows the typical interference fringe pattern of the double slit Neon atom interferometer. The Fig. 1 is a reproduction of the Fig. 3 (b) in Shimizu et al's paper. In the Fig.1, two vertical arrows show the position where the Fraunhofer diffraction limit is assumed in the previous paper. Two broken curves indicate the envelopes of the maximum and the minimum values of the interference, which is discussed in detail in § 3.

The wavelength of the de Broglie wave for the case in Fig.1 is estimated as 100 \AA .

§ 3 The Analyses of the Experimental Results

Figure 2 shows the experimental set up for the atom interferometer, which is reported on Fig.1 in Shimizu et al's paper. The effective diameter of the “source” is $80 \mu\text{m}$. The slit width of the double slit is $2 \mu\text{m}$, and the separation is $6 \mu\text{m}$ (center to center). The distance from the source to the double slit is 76 mm , and it is 113 mm from the double slit to the detector.

Figure 3 shows the layout of the “optical interferometer”, as is shown on Fig. 10.5 in § 10.4.3 in Ref. (1). The beam “source” in Fig. 2 corresponds to the pin hole on σ_1 , in Fig. 3, which has $2\rho_1$ diameter. It would be easily noticed by comparing Fig. 2 and Fig. 3, that one cannot provide a lens for the atom interferometer. Therefore, the Young type experiment cannot separate the two effects; diffraction and interference.

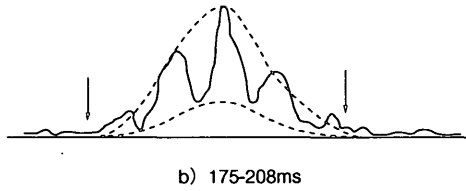


Fig. 1 Interference fringes of the double slit Neon atom interferometer.

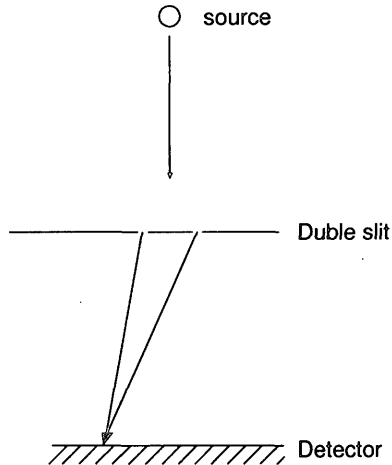


Fig. 2 Schematic layout for the atom interferometer.

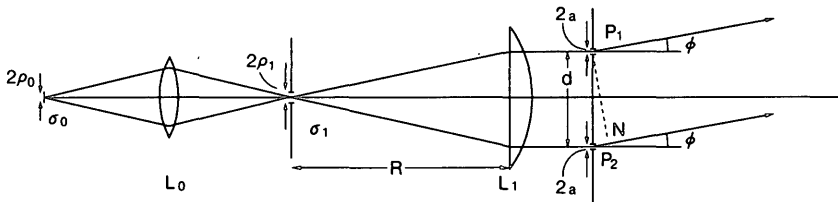


Fig. 3 Layout of the optical interferometer.

The fundamental equation for interference of the two light beams is shown in § 10.4 in Ref. (1) as following;

$$I(Q) \sim I(Q^{(1)}) + I(Q^{(2)}) + \sqrt{I(Q^{(1)})} \sqrt{I(Q^{(2)})} \left| \mu_{12} \right| \cos(\beta_{12} - \delta) \dots\dots\dots(1)$$

where, $I(Q)$; light intensity at a point Q ,

$I(Q^{(1)})$, $I(Q^{(2)})$; light intensity at point Q , which is diffracted from each opening (1) or (2)

μ_{12} ; complex degree of coherence,

β_{12} ; effective phase difference,

δ ; phase difference between the two beams.

If the light source is uniform and circular, and the light intensities are equal for the both opening, then eq. (1) reduces to as following;

$$I(\phi, d) = 2 \left(\frac{2J_1(u)}{u} \right)^2 \left\{ 1 + \left| \frac{2J_1(v)}{v} \right| \cos[\beta_{12}(v) - \delta] \right\} \dots\dots\dots(2)$$

where, J_1 ; a Bessel function,

$\bar{\lambda}$; mean de Broglie wavelength,

$$u = \frac{2\pi}{\bar{\lambda}} a \sin \phi \dots\dots\dots(3)$$

$$v = \frac{2\pi}{\bar{\lambda}} \frac{\rho_1 d}{R} \dots\dots\dots(4)$$

$$\beta_{12}(v) = \begin{cases} 0, & \frac{2J_1(v)}{v} > 0 \dots\dots\dots(5) \end{cases}$$

$$\beta_{12}(v) = \begin{cases} \pi, & \frac{2J_1(v)}{v} < 0 \dots\dots\dots(6) \end{cases}$$

$$\delta = \frac{2\pi}{\bar{\lambda}} d \sin \phi \dots\dots\dots(7)$$

The notations are to be referred to Fig. 3.

The envelop function for the maximum and the minimum values are obtained by putting $\cos[\beta_{12}(v) - \delta]$ to ± 1 in the eq. (2), and the results are;

$$I_{\max}(\phi, d) = 2 \left(\frac{2J_1(u)}{u} \right)^2 \left\{ 1 + \left| \frac{2J_1(v)}{v} \right| \right\} \dots\dots\dots(8)$$

$$I_{\min}(\phi, d) = 2 \left(\frac{2J_1(u)}{u} \right)^2 \left\{ 1 - \left| \frac{2J_1(v)}{v} \right| \right\} \dots\dots\dots(9)$$

The visibility of the fringes, $V(Q)$, or the degree of coherence is defined by,

$$V(Q) = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \left| \frac{2J_1(v)}{v} \right| \dots\dots\dots(10)$$

and the following values are to be used for the variables;

$$\bar{\lambda} = 100 \text{ \AA} = 1 \times 10^{-6} \text{ cm}$$

$$2\rho_1 = 80 \text{ \mu m}, (\rho_1 = 4 \times 10^{-3} \text{ cm})$$

$$d = 6 \text{ \mu m} = 6 \times 10^{-4} \text{ cm}$$

$$a = 1 \text{ \mu m} = 1 \times 10^{-4} \text{ cm}$$

$$R = 7.6 \text{ cm}$$

$$\text{then, } v = 1.98, \dots\dots\dots(11)$$

and the degree of coherence becomes,

$$\left| \frac{2J_1(v)}{v} \right| = 0.5837 \dots\dots\dots(12)$$

§ 4 Discussions

The interference fringe pattern, which is shown in Fig. 1, is fully understood only by employing the partially coherent waves. The accordance between the experimental and the theoretical results are satisfactory. (Experimental value is 0.5609.) Believe it or not, de Broglie wave is only partially coherent. This effect is shown by the broken curves in Fig. 1. They represent the envelopes for the maximum and the minimum points in the interference fringes.

The interference fringes of light, due to a set of double slit, is often demonstrated by using a laser beam. In this case, the light beam is well coherent, and the interference fringes show up with a good visibility (or degree of coherence). However,

the de Broglie wave due to the atom beam is far from complete coherency. The deduced value of the degree of coherence is 0.5837 for the present case.

There are many demonstrations for the interference fringe due to "double slit" experiment of electron beam. Peoples believe in easily that the split electron beam is perfectly coherent. The author feels it is very dubious to say that "each electron passes the two slits at a time", or to say that "electron knows whether there are two slits or just one". Because, about 30% of de Broglie wave passed the single slit, nevertheless there are two slits. The partially coherent features of the electron beam will show up clearly, if electron beam experiments will be performed more carefully.

We must accept the following statement; The experiment shows, without doubt, that the atom de Broglie wave has partially coherent features. The question is, whether this is the essential character of the atom de Broglie wave and cannot be eliminated, or this is simply due to a technical limit of the experiment? Another words, can we expect that an Atom-Laser will be invented someday, and we will have a perfectly coherent atom wave? The author believes this is a big question and an important branching point of the further arguments.

§ 5 Conclusion

The analyses have been performed on the experimental data of the interference fringes of atom de Broglie wave. It is clearly shown that the atom de Broglie wave is partially coherent. The degree of coherence is 0.5837, which is far from the perfect coherence.

References

- (1) Max Born and Emil Wolf : "Principles of Optics" Pergamon Press, 3rd Edition.
- (2) O. Carnel and J. Mlynek : Phys. Rev. Lett. 66 (1991) 2689.
- (3) D. W. Keith, C. R. Ekstrom, Q. A. Turchette and D. E. Pritchard : Phys. Rev. Lett. 66 (1991) 2693.
- (4) F. Shimizu, K. Shimizu and H. Takuma : Phys. Rev. A (1992) R17.
- (5) H. Fujita: "Fraunhofer Diffraction and Dispersion Relation of de Broglie Wave", Chuo-Gakuin Univ. Report Vol. 6, No. 2 (1993).
- (6) H. Fujita : "Relativistic de Broglie Wave", Part II of this article.
- (7) C. Møller : "The Theory of Relativity", Oxford Univ. Press, 1952.
- (8) A. Messiah : "Quantum Mechanics", North-Holland, John Wiley.

[訳 文]

ドブroy波について

第 I 部 部分的可干渉 (Partially Coherent) なドブroy波

藤 田 秀

〈目 次〉 概 要

§1 序 論

§2 実験結果

§3 実験結果の解析

§4 検 討

§5 結 論

概 要

清水等による，原子干渉計の実験データを解析した．彼等は超低速のネオン原子ビームと，ヤング型のダブルスリットによる回折干渉計を用いて実験した．原子ビームの干渉縞は，典型的な部分的可干渉の特徴を示している．それなのに，量子力学の理論家達は，部分的可干渉の光学に精通しておらず，干渉縞の模様を，完全可干渉ビームを用いて計算する．従って，もっと現実的な仮定のもとで実験データを解析する必要がある．原子ビームのドブロイ波は，部分的可干渉であり，その解析によりドブロイ波の可干渉度が求められる．

§1 序 論

ヤングのダブルスリットの実験は有名である⁽¹⁾．そこには干渉縞が現われ，光の波動性が示されている．ルイ・ピクトール・ピエール・レイモン・ドブロイが電子の波動性を見付けると，電子ビームの干渉縞を観測することに皆が努力した．その結果，「原子波」の干渉縞が観測されるまでになった⁽²⁾⁽³⁾．

ネオン原子とダブルスリットを用いた「原子波」の干渉縞が，清水等によって観測された⁽⁴⁾．実験結果は，フラウンホーファー回折の視点によって解析され，ドブロイ波の方程式が直接検証された⁽⁵⁾．しかしながら，一般的に言って，回折と干渉とは別問題である．前の論文では，ネオン原子のドブロイ波が回折することだけを示した．驚いたことに，この回折は，フラウンホーファー回折の理論に従うのである．従って，もっと実験の精度を上げれば，ドブロイ波は，フレネル回折の理論や，ハイゲンスーフレネルの原理にさえも従うであろうと予想される．

著者の意見では，ネオン原子のドブロイ波が，電磁波の回折理論に従わねばならない明白な理由も，必要性もないことは，言うまでもないように思わ

れる。なぜなら、電磁波は「リアル」なベクトル波であり、ドブロイ波は「コンプレックス」な波であるからである。

ドブロイは、ドブロイ波の波長と粒子の運動量との間の関係を示した。ところが、波の速度についての条件をゆるめてやると、おかしなことがおき⁽⁶⁾る。理論によれば、ドブロイ波は、光の速度に等しいときだけ意味を持つことになっている。⁽⁷⁾⁽⁸⁾しかしながら、原子がその線源から、非常にゆっくりと「自由落下」しているときに、ドブロイ波の方は光の速さで伝わると考えることは、おかしなことではないだろうか？

この論文では、ドブロイ波にも、光の波のように有限な可干渉長があることが暗示される。その詳しい議論は、つぎの論文でおこなわれる予定である。

§2 実験結果

図1は、ダブルスリットによるネオン原子干渉計の、典型的な干渉縞である。これは、清水等による論文⁽⁴⁾中の、図3 (b)の再録である。図1中の2本のタテの矢印は、前の論文⁽⁵⁾において、フラウンホーファー回折の終点とした位置を示している。2本の破線は、干渉縞の極大・極小をつないだ包絡線であって、§3で詳しくとりあつかう。

図1のばあいのドブロイ波の波長は、約100 オングストロームであることが判⁽⁵⁾っている。

§3 実験結果の解析

図2は、原子干渉計の配置図で、清水等による論文⁽⁴⁾中の図1に示されたものである。「線源」の直径は80 ミクロンである。ダブルスリットのスリット幅は2 ミクロンで、スリットの間隔は、中心間距離で、6 ミクロンである。線源からダブルスリットまでの距離は76 ミリ、ダブルスリットから検

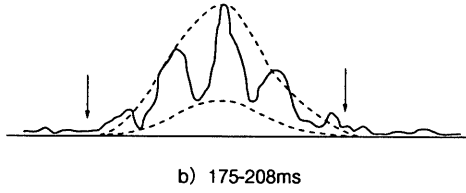


図1 ダブルスリットによる、ネオン原子波の干渉縞

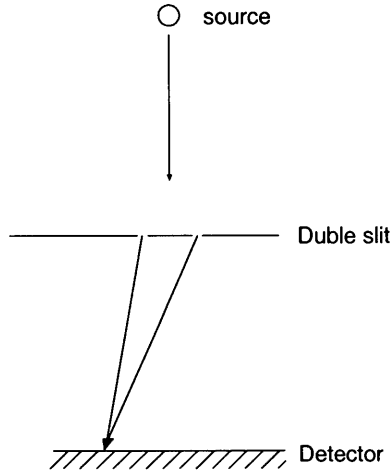


図2 原子干渉計の配置図

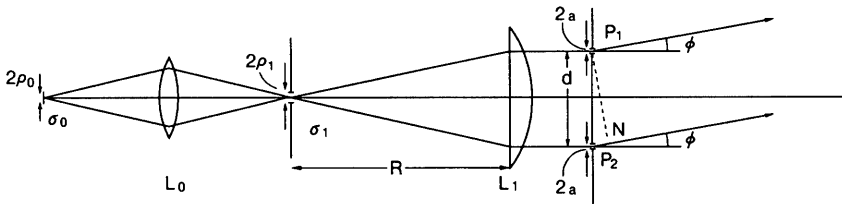


図3 光学的回折干渉計

出器までの距離は、113 ミリである。

図3は、「光学回折干渉計」の配置図で、参照文献(1)中の §10・4・3 の第 10・4・5 図に出ている。図2中の「線源」は、図3では σ_1 上のピンホールに対応していて、直径 $2\rho_1$ である。図2と図3を比べるとすぐに判るように、原子干渉計にはレンズに相当するものが作れない。従って、ヤング型の実験では、回折と干渉の2つの効果が分離されていない。

2本の光線の干渉の基礎方程式は、参照文献(1)の中の §10・4 に次のように表わされている：

$$I(Q) \sim I^{(1)}(Q) + I^{(2)}(Q) + 2\sqrt{I^{(1)}(Q)}\sqrt{I^{(2)}(Q)}\left|\mu_{12}\right|\cos(\beta_{12} - \delta) \dots\dots\dots(1)$$

但し、 $I(Q)$; Q点での光の強度

$I^{(1)}(Q)$, $I^{(2)}(Q)$; 開口部(1), (2)から Q 点に回折してくる光の強度

μ_{12} ; 複素可干渉度

β_{12} ; 実効位相差

δ ; 2 光線の位相差

もし光源が円形で、強度が均一で、ダブルスリットに来る光の強度が等しければ、式(1)は以下ようになる：

$$I(\phi, d) = 2\left(\frac{2J_1(u)}{u}\right)^2 \left\{1 + \left|\frac{2J_1(v)}{v}\right| \cos[\beta_{12}(v) - \delta]\right\} \dots\dots\dots(2)$$

但し、 J_1 はベッセル関数

$\bar{\lambda}$ はドブロイ波長の平均値

$$u = \frac{2\pi}{\bar{\lambda}} a \cdot \sin\phi \dots\dots\dots(3)$$

$$v = \frac{2\pi}{\bar{\lambda}} \frac{\rho_1 d}{R} \dots\dots\dots(4)$$

$$\beta_{12}(v) = \begin{cases} 0, & \frac{2J_1(v)}{v} > 0 \dots\dots\dots(5) \end{cases}$$

$$\beta_{12}(v) = \begin{cases} \pi, & \frac{2J_1(v)}{v} < 0 \dots\dots\dots(6) \end{cases}$$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \cdot \sin \phi \dots \dots \dots (7)$$

記号については、図3を参照のこと。極大値・極小値の包絡線については、(2)式中の $\cos[\beta_{12}(v) - \delta]$ を ± 1 として以下のように求まる：

$$I_{\max}(\phi, d) = 2 \left(\frac{2J_1(u)}{u} \right)^2 \left\{ 1 + \left| \frac{2J_1(v)}{v} \right| \right\} \dots \dots \dots (8)$$

$$I_{\min}(\phi, d) = 2 \left(\frac{2J_1(u)}{u} \right)^2 \left\{ 1 - \left| \frac{2J_1(v)}{v} \right| \right\} \dots \dots \dots (9)$$

干渉縞のビジビリティ ($V(Q)$)、或いは可干渉度は次のように定義されている：

$$V(Q) = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \left| \frac{2J_1(v)}{v} \right| \dots \dots \dots (10)$$

ここで各変数については、以下の値をとる。

$$\bar{\lambda} = 100 \text{ \AA} = 1 \times 10^{-6} \text{ cm}$$

$$2\rho_1 = 80\mu, (\rho_1 = 4 \times 10^{-3} \text{ cm})$$

$$d = 6\mu = 6 \times 10^{-4} \text{ cm}$$

$$a = 1\mu = 1 \times 10^{-4} \text{ cm}$$

$$R = 7.6 \text{ cm}$$

$$\text{このとき, } v = 1.98 \dots \dots \dots (11)$$

となり、理論的可干渉度は、

$$\left| \frac{2J_1(v)}{v} \right| = 0.5837 \dots \dots \dots (12)$$

となる。一方、実測値は 0.5609 である。言うまでもなく、1.0 が完全可干渉に相当する。

§4 検 討

図1に示されている干渉縞のパターンは、部分的可干渉波を用いて、はじ

めて完全に理解される。実験と理論との一致は非常によい。信じようと信じまいと、ドブロイ波は部分的可干渉波なのである。この効果は、図1中の破線で示されている。この破線は、干渉縞の極大値・極小値の包絡線である。

ダブルスリットによる光の干渉縞は、よくレーザー光線を用いて示される。このばあい、光は良い可干渉性をもっていて、干渉縞は高いビジビリティ（可干渉度）を示す。しかしながら、原子線のドブロイ波には、とても完全な可干渉性などない。実験値から理論的に求められる可干渉度は0.5837、実測値は0.5609である。これは、6ミクロン離れた2つのスリットの間には、これだけの可干渉度しかないことを示している。

電子線を使った「ダブルスリット」の実験によって、干渉縞を示した例は多い。この結果を見て、分割された電子線は、完全に可干渉的であると、簡単に信じ込んでいる人は多い。しかし著者は、「どの電子も、2つのスリットを同時に通りぬけた」とか、「電子は、スリットが1つであるか2つであるかを知っている」とかいう言いぶんは、非常に疑わしいと考えている。なぜならば、ネオン原子のドブロイ波のばあいには、スリットが2つあったにもかかわらず、約30%のドブロイ波は、「一方のスリットだけ」を通ったのである。電子線の実験が、もっと注意ぶかく行なわれるようになれば、部分的可干渉の特徴が、電子のばあいについても現われてくるであろう。

われわれは、次のように言わなければならない：

原子のドブロイ波には、部分的可干渉の特徴があることを、実験は示した。問題は、これは原子のドブロイ波の本質的な性質であって、どうしても消去できないものであるのか、それとも単に、実験技術の限界によるのか、である。言い換えれば、いつの日にか、原子線レーザーが発明されて、完全に可干渉的な原子波が得られるようになるかと考えるのか、である。これは大きな問題点であり、議論のわかれめであると考ええる。

§5 結 論

ネオン原子ドブロイ波の、干渉縞の実験データを解析した。原子ドブロイ波は部分的可干渉であることが、明確に示された。可干渉度は 0.5837 であって、完全に可干渉的であるというには程遠い。

〔参考文献〕

- (1) Max Born and Emil Wolf : "Principles of Optics" Pergamon Press, 3rd Edition.
- (2) O. Carnel and J. Mlynek : Phys. Rev. Lett. 66 (1991) 2689.
- (3) D. W. Keith, C. R. Ekstrom, Q. A. Turchette and D. E. Pritchard : Phys. Rev. Lett. 66 (1991) 2693.
- (4) F. Shimizu, K. Shimizu and H. Takuma : Phys. Rev. A (1992) R17.
- (5) H. Fujita : "Fraunhofer Diffraction and Dispersion Relation of de Broglie Wave", Chuo-Gakuin Univ. Report Vol. 6, No. 2 (1993).
- (6) H. Fujita : "Relativistic de Broglie Wave", Part II of this article.
- (7) C. Møller : "The Theory of Relativity", Oxford Univ. Press, 1952.
- (8) A. Messiah : "Quantum Mechanics", North-Holland, Jhon Wiley.

Article

On de Broglie Wave

Part II Relativistic de Broglie Wave

Hiizu FUJITA

CONTENT Part II Relativistic de Broglie Wave

Abstract

§ 1 Introduction

§ 2 Theoretical Results

§ 3 Discussions

§ 4 Conclusion

Abstract

The de Broglie wave equation, i.e. $\lambda = h/p$, is derived from the principle of relativity. On the way, a parameter β' , which is equal to v_g/c , appears, and the de Broglie wave equation is obtained by putting $\beta' = 1$. The de Broglie wavelength is numerically calculated as a function of β , where $\beta = u/c$.

By putting $\beta' = \beta$, "another de Broglie wave" appears and the features of the new wave is shown by calculating the equation numerically.

§ 1 Introduction

The de Broglie wave equation is well established and it appears that there is no internal contradictions. It is easily verified when a particle moves with constant velocity. In this case, the motion of the particle is well expressed by a plane wave, and the famous relation holds;

$$|P = \hbar k \dots\dots\dots(1)$$

On the one dimensional case, the vector equation can be written by a scalar equation, and the de Broglie equation is achieved as,

$$P = \hbar k = \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{h}{\lambda} \dots\dots\dots(2)$$

Therefore, the wavelength of the de Broglie wave becomes,

$$\lambda = \frac{h}{P} \dots\dots\dots(3)$$

On the other side, the reality of the de Broglie wave is directly examined experimentally, by analyzing the "Atom interferometer" data. In the analysis, it is shown that the de Broglie wave behaves as if it is real wave, like light wave. It shows the Fraunhofer diffraction, as well as interference. In this small article, the author would like to show the relationship between the de Broglie wave and the principle of relativity. It is also shown that there is "another de Broglie wave", under some circumstances. The wavelength of the new wave is extremely short, and it is imagined that the wave represents the particle character, rather than wave properties.

The wave length of the new wave is zero, when u, the velocity of a particle, is zero, contrary to $\lambda = h/p$, which goes up to infinity when $u=0$. The difference between the new wave and the ordinary de Broglie wave gets smaller and smaller when β approaches to 1, and the wavelength of the two waves become zero, when $\beta=1$.

In § 2, the derivation of the new wave is shown, and the numerical results are also shown in a graph. Discussions on the results are presented in § 3.

§ 2 Theoretical Results

The relativistic invariant quantity is represented as,

$$\epsilon^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4 \dots\dots\dots(4)$$

where the notations are as conventional use. Taking the derivative of eq (4),

$$2\epsilon \cdot d\epsilon - 2p \cdot dp \cdot c^2 = 0 \dots\dots\dots(5)$$

Therefore, group velocity, v_g , becomes,

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial p} \equiv v_g = \frac{pc^{(3)}}{\epsilon} \dots\dots\dots(6)$$

(A) case I ($\beta' = 1$)

If we set in eq. (6) $v_g = c^{(4)} \dots\dots\dots(7)$

or if we let $v_g/c = \beta' \dots\dots\dots(8)$

and put $\beta' = 1 \dots\dots\dots(9)$

then $\epsilon = pc \dots\dots\dots(10)$

Therefore it becomes, $\epsilon^2 - p^2 c^2 = 0 \dots\dots\dots(11)$

which means $m_0 = 0, \dots\dots\dots(12)$

i.e., light quantum has no restmass.

Let us go further from eq. (10). By combining the famous equations,

$$\epsilon = h\nu \dots\dots\dots(13)$$

$$\text{and } c = \nu\lambda \dots\dots\dots(14)$$

$$\text{then, } pc = \epsilon = h\nu = h \frac{c}{\lambda} \dots\dots\dots(15)$$

Thus the de Broglie wave equation,

$$\lambda = h/p \dots\dots\dots(16)$$

is derived from eq. (15).

The relativistic momentum, P, is represented as,

$$|P| = \frac{m_0 |u|}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \dots\dots\dots(17)$$

and in case of one dimensional motion, the de Broglie wavelength is represented by,

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{m_0 c} \cdot \frac{1}{\frac{u}{c}} \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \\ &= \frac{h}{m_0 c} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \sqrt{1 - \beta^2} \dots\dots\dots(18) \end{aligned}$$

The factor, h/m_0c , is the Compton wavelength of the particle. The numerical results of eq. (18) is shown by the curve I, in Fig. 1. The de Broglie wavelength, λ , becomes zero when $\beta=1$, and it becomes infinity when $\beta=0$.

(B) Case II ($\beta'=\beta$)

What if $v_g \neq c$ in eq. (6)? Then,

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \equiv v_g = \frac{pc^2}{\varepsilon} \dots\dots\dots(6)$$

By combining $v_g = \nu \lambda$ \dots\dots\dots(19)

and $\varepsilon = h\nu$ \dots\dots\dots(13)

We obtain $\lambda = \beta'^2 \frac{h}{p}$ \dots\dots\dots(20)

$$= \beta'^2 \cdot \frac{h}{m_0 c} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \sqrt{1 - \beta^2} \dots\dots\dots(21)$$

where, $\beta' = v_g/c$ and $\beta = u/c$ \dots\dots\dots(22)

here, v_g represents the group velocity and u is the particle velocity. The group velocity and the particle velocity meet together, and we can put ⁽¹⁾

$$\beta' = \beta \dots\dots\dots(23)$$

Finally, we obtain the following equation for the “new de Broglie wave”;

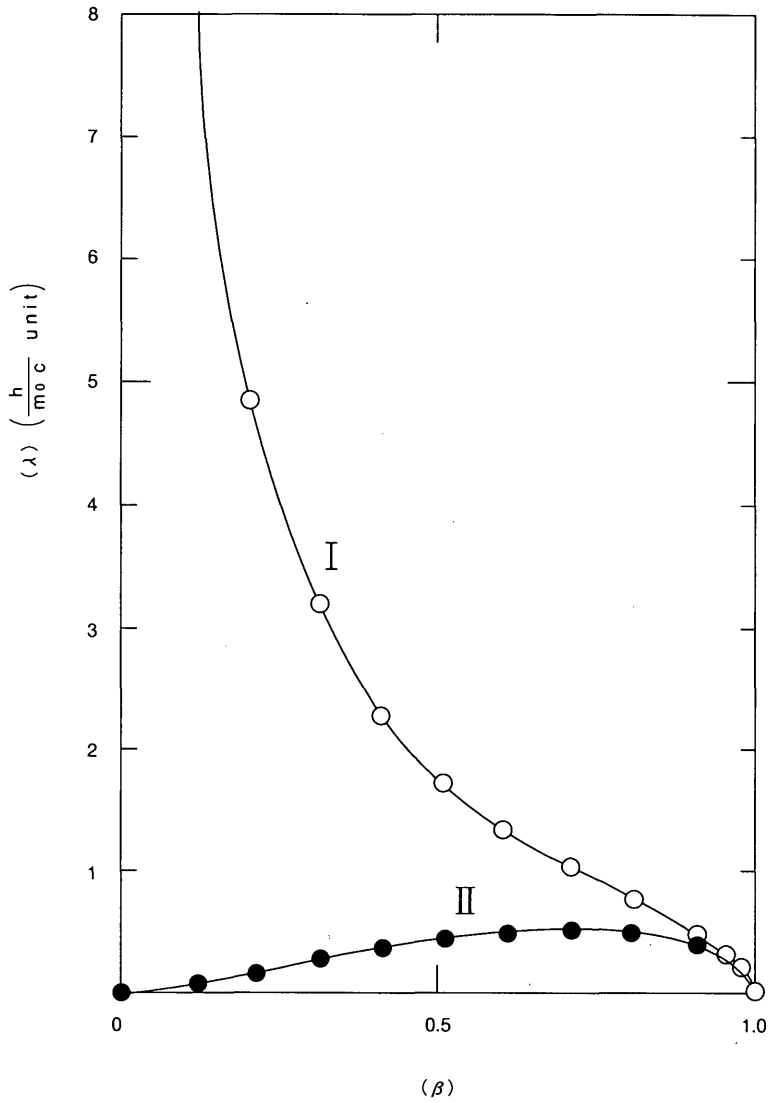


Fig. 1 β dependence of de Broglie wavelength.

$$\lambda = \beta \frac{h}{m_0 c} \cdot \sqrt{1 - \beta^2} \dots \dots \dots (24)$$

In table 1, the numerical results of eq. (18) and eq. (21) are shown, and they are represented by the curves I and II in Fig. 1, respectively.

Table 1 β -dependent part of de Broglie wave.

β	$\frac{1}{\beta} \sqrt{1 - \beta^2}$	$\beta^2 \frac{1}{\beta} \sqrt{1 - \beta^2}$
0.0		0.0000
0.1	9.9498	0.0994
0.2	4.8989	0.1959
0.3	3.1797	0.2861
0.4	2.2912	0.3665
0.5	1.7320	0.4330
0.6	1.3333	0.4799
0.7	1.0202	0.4998
0.8	0.7500	0.4800
0.9	0.4843	0.3922
0.95	0.3286	0.2966
0.975	0.2279	0.2166
1.0	0.0000	0.0000

§ 3 Discussions

(A) Case I ($\beta' = 1$)

The de Broglie wave is obtained by putting $\beta' = 1$ as shown in eq. (8) and (9). Nevertheless, the parameter β is changed from 1 to 0, as shown in eq. (18). This sounds like inconsistent : To put $\beta' = 1$ on one hand, and to take β as a variable on the other hand. However, the reality of de Broglie wave is directly shown, even for Neon atom, by the Atom-Interferometer experiment.

(B) Case II ($\beta' = \beta$)

There will be some questions on eq. (19), for putting $v_g = \nu\lambda$, since v_g is the group velocity. However, it is shown, experimentally, that the difference between the

group velocity and the phase velocity for the Neon atom beam is only scalar factor of 2 difference. ⁽¹⁾ So, this assumption, eq. (19), should not be fatal.

The wavelength of this “new de Broglie wave” is very short. It is proportional to the particle velocity, u , when β is small. It sounds like this feature shows the “particle-like” properties of the wave; while the normal de Broglie wave represents the “wave-like” properties of the particle.

§ 4 Conclusion

- (1) The de Broglie wave equation is derived by using the principle of relativity.
- (2) A funny wave appears when the group velocity of the de Broglie wave is supposed not to be the light velocity.

(November 22, 1993)

References

- (1) Hiizu Fujita : “Fraunhofer Diffraction and Dispersion Relation of de Broglie Wave”, Chuo-Gakuin University Report, Vol. 6, No. 2 (1993).
- (2) F. Shimizu, K. Shimizu and H. Takuma : “Double-Slit Interferometer with Ultracold Metastable Neon Atoms” Phys. Rev. A. (1992) R17.
- (3) C. Møller : “The Theory of Relativity”, Oxford University Press, 1952, Chap. 3, § 28, eq. (36).
- (4) A. Messiah : “Quantum Mechanics”, North-Holland, John Wiley, Chap.1, § 5.

[訳文]

ドブロイ波について
第Ⅱ部 相対論的ドブロイ波

藤 田 秀

〈目次〉概要

§1 序論

§2 理論の結果

§3 検討

§4 結論

概 要

ドブロイ波の方程式, $\lambda = h/p$, を相対論の原理から導いた. その途中で, パラメータ $\beta' = v_g/c$ が現われたが, ドブロイ波の方程式は, $\beta' = 1$ とおくことによって求められた. ドブロイ波の波長は, $\beta = u/c$ の関数として数値計算して求めた.

$\beta' = \beta$ とおくことによって, 「もう一つのドブロイ波」が現われた. この波の特性は, 方程式を数値計算することによって示された.

§1 序 論

ドブロイ波の方程式は, すっかり確立されており, どこにも内部矛盾を含んでいないように思われる. この方程式は, 粒子が等速運動をしているときには, 簡単に確かめることが出来る. このばあいには, 粒子の運動は平面波でよく表現され, 有名な式,

$$p = \hbar k \dots \dots \dots (1)$$

が成り立つ. 次元のばあいには, ベクトル方程式はスカラー方程式で表わされ, ドブロイ方程式が次のようにして得られる.

$$p = \hbar k = \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{h}{\lambda} \dots \dots \dots (2)$$

従ってドブロイ波長は

$$\lambda = \frac{h}{p} \dots \dots \dots (3)$$

となる.

一方, ドブロイ波の実在性は, 「原子干渉計」のデータ⁽²⁾を解析することによって, 直接的に確かめられた⁽¹⁾. その解析では, ドブロイ波は光の波のように振舞い, 干渉だけでなく, フラウンホーファー回折をすることが示され

た. この小論文では, ドブroy波と相対論の関係を示したい. 更に, 特別な事情のもとでは, 「もう一つのドブroy波」が存在することが示される. この「新しい波」の波長は極端に短く, これは波動というよりも, 粒子的性格を示すと考えられる.

「新しい波」の波長は, 粒子の速度がゼロになると, 波長もゼロになり, これは h/p のドブroy波の波長が, $u=0$ で無限大になるのと対照的である. 新しい波と通常のドブroy波との差は, β が1に近づくほど小さくなり, $\beta=1$ ではどちらの波の波長もゼロとなる.

§2 では, 新しい波の出し方が示されて数値計算の結果がグラフで示される. ディスカッションは §3 で述べられる.

§1 理論の結果

相対論的不変量は,

$$\epsilon^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4 \dots\dots\dots(1)$$

と書かれる. ただし記号は通常の使用法による. (1)式の微分をとると,

$$2\epsilon \cdot d\epsilon - 2p \cdot dp \cdot c^2 = 0 \dots\dots\dots(2)$$

となる. したがって, 「粒子の速度」 v_g は,

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial p} = v_g = \frac{pc^2}{\epsilon} \dots\dots\dots(3)$$

となる.

(A) ケース I ($\beta'=1$ のばあい)

もし, (3)式で

$$v_g = c \dots\dots\dots(4)$$

あるいは,

$$\frac{v_g}{c} = \beta' \dots\dots\dots(5)$$

とにおいて,

$$\beta' = 1 \dots\dots\dots(6)$$

とおけば、式(3)は

$$\epsilon = pc \dots\dots\dots(7)$$

となる。したがって

$$\epsilon^2 - p^2 c^2 = 0 \dots\dots\dots(8)$$

となり、これは

$$m_0 = 0 \dots\dots\dots(9)$$

すなわち、光子には静止質量がないことを意味している。

(7)式を更に進めよう。これに、有名な以下の式、すなわち

$$\epsilon = h\nu \dots\dots\dots(10)$$

$$c = \nu\lambda \dots\dots\dots(11)$$

を組合せると、

$$pc = \epsilon = h\nu = h \frac{c}{\lambda} \dots\dots\dots(12)$$

となる。すなわち、ドブロイ波の方程式

$$\lambda = \frac{h}{p} \dots\dots\dots(13)$$

が導かれる。

相対論的運動量 p は、

$$|p| = \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \dots\dots\dots(14)$$

と表わされ、1次元のばあいには、ドブロイ波長は

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{m_0 c} \cdot \frac{1}{\frac{u}{c}} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \\ &= \frac{h}{m_0 c} \cdot \frac{1}{\beta} \sqrt{1 - \beta^2} \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

となる。係数 $\frac{h}{m_0 c}$ は、粒子のコンプトン波長である。式(15)の数値計算の結果は、図1中の曲線Iで示されている。ドブロイ波長 λ は、 $\beta=1$ でゼロになり、 $\beta=0$ で無限大となる。

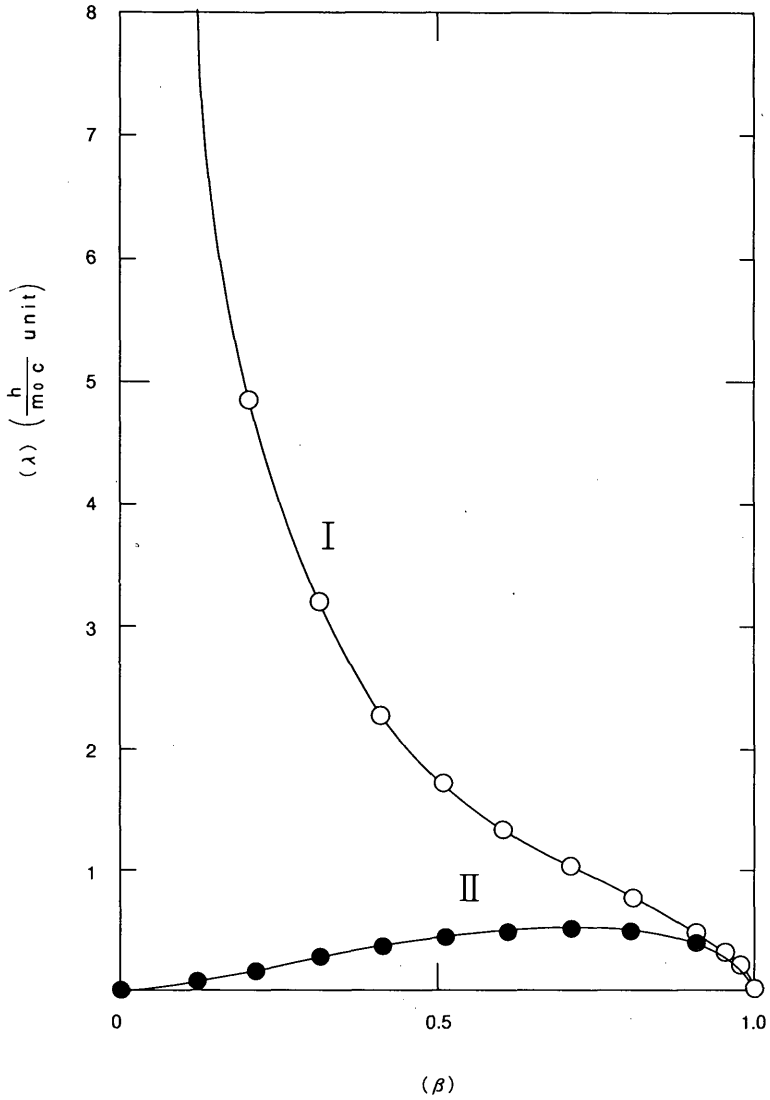


図1 ドブロイ波長の β 依存性

(B) ケース II ($\beta' = \beta$ のばあい)

式(3)で $v_g \neq c$ ならばどうなるか? このばあいには,

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial p} = v_g = \frac{pc^2}{\varepsilon} \dots\dots\dots (3)$$

であり, $v_g = \nu \lambda \dots\dots\dots (16)$

$$\varepsilon = h\nu \dots\dots\dots (10)$$

を組み合わせると,

$$\lambda = \beta'^2 \cdot \frac{h}{p} \dots\dots\dots (17)$$

$$= \beta'^2 \cdot \frac{h}{m_0 c} \cdot \frac{1}{\beta} \sqrt{1 - \beta^2}$$

となる。ただし,

$$\beta' = v_g/c, \quad \beta = u/c \dots\dots\dots (18)$$

である。ここで, v_g は群速度, u は粒子の速度である。群速度と粒子の速度とは同じになるから,

$$\beta' = \beta \dots\dots\dots (20)$$

とおける。最終的には, 「新しいドブロイ波」の方程式として,

$$\lambda = \beta \cdot \frac{h}{m_0 c} \sqrt{1 - \beta^2} \dots\dots\dots (21)$$

を得る。表 1 に(15)式と(21)式の数値計算の結果を示し, 図 1 中では, それぞれカーブ I, II で表わされている。

§ 3 検 討

(A) ケース I ($\beta' = 1$ のばあい)

ドブロイ波は, 式(5)と(6)に示したように, $\beta' = 1$ とした時に求められる。それにもかかわらず, パラメータ β の方は, 式(15)に示したように, 1 から 0 まで変化させる。このように, 一方では $\beta' = 1$ とし, 他方では β を変数とするのは, 矛盾しているようにも思われる。しかしながら, ドブロイ波の

表 1 ドブロイ波長の β 依存部分

β	$\frac{1}{\beta} \sqrt{1-\beta^2}$	$\beta^2 \frac{1}{\beta} \sqrt{1-\beta^2}$
0.0		0.0000
0.1	9.9498	0.0994
0.2	4.8989	0.1959
0.3	3.1797	0.2861
0.4	2.2912	0.3665
0.5	1.7320	0.4330
0.6	1.3333	0.4799
0.7	1.0202	0.4998
0.8	0.7500	0.4800
0.9	0.4843	0.3922
0.95	0.3286	0.2966
0.975	0.2279	0.2166
1.0	0.0000	0.0000

実在性は、ネオン原子のばあいさえ、原子干渉計の実験によって、直接的に示されている。

(B) ケースⅡ ($\beta'=\beta$ のばあい)

式(16)において、 $v_g=v\lambda$ とするのは、疑問とする点もあろう。なぜなら v_g は群速度だからである。しかしながら、群速度と位相速度の違いは、ファクター 2 だけであることが、実験的に示されている⁽¹⁾。したがって、式(16)の仮定は致命的なものではないであろう。

「新しいドブロイ波」の波長は非常に短い。 β が小さいときには、粒子の速度 u に比例している。この特徴は、波動の「粒子性」を表しているように思われる。一方通常のドブロイ波は、粒子の「波動性」を示していると考えられる。

§4 結 論

(1)相対論を用いて、ドブロイ波の式を導いた。

(2)ドブロイ波の群速度が光速 c でないとすると、ふしぎな波があらわれ

た.

(1993年11月22日)

[参考文献]

- (1) Hiizu Fujita : "Fraunhofer Diffraction and Dispersion Relation of de Broglie Wave", Chuo-Gakuin University Report, Vol. 6, No. 2 (1993).
- (2) F. Shimizu, K. Shimizu and H. Takuma : "Double-Slit Interferometer with Ultracold Metastable Neon Atoms" Phys. Rev. A.(1992)R17.
- (3) C. Møller : "The Theory of Relativity", Oxford University Press, 1952, Chap. 3, § 28, eq.(36).
- (4) A. Messiah : "Quantum Mechanics", North-Holland, John Wiley, Chap. 1, § 5.