[研究ノート]

ベルヌーイ数B_nについて

柳　下　公　男

〈目　次〉

1. はじめに

本稿では，

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n$$

によって定められたB_nをn次のベルヌーイ数という．

ここでは次の恒等式

(1) $$\frac{x}{e^x-1}-\frac{2x}{e^{2x}-1}=\frac{x}{e^x+1}$$

を用いてベルヌーイ数B_nを求めることにする．

2. ベルヌーイ数B_nの公式

(1)より

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-2^n)B_n}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n-1)}(0)}{n!}x^n$$

を得る．

ここで，$f^{(0)}(x)=f(x)=\dfrac{1}{e^x+1}$ である．

(2)において，両辺を$n+1$回微分して，$x=0$とすると

$$\begin{cases} B_{n+1}=\dfrac{n+1}{1-2^{n+1}}f^{(n)}(0) & (n\geq 1) \\ B_1=-\dfrac{1}{2} & \end{cases}$$

を得る．

3. n次微分公式$f^{(n)}(x)$

n次導関数$f^{(n)}(x)$ を求めるため

(3) $$f^{(n)}(x)=\frac{1}{(e^x+1)^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}a_{n,k}e^{kx}$$

とおくと，$f'(x)=\dfrac{-e^x}{(e^x+1)^2}$より次の漸化式を得る：

(4) $$\begin{cases} a_{n+1,1}=a_{n,1}, & a_{1,1}=-1 \\ a_{n+1,k}=ka_{n,k}-\{n-(k-2)\}a_{n,k-1}, & (2\leq k\leq n) \\ a_{n+1,n+1}=-a_{n,n} \end{cases}$$

ここで

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{1}{(e^x+1)^{n+2}}\sum_{k=1}^{n+1}a_{n+1,k}e^{kx}$$

である．

これより次の等式を得る：

(5) $$B_{n+1}=\frac{\mathrm{n}+1}{1-2^{n+1}}\frac{Sum(n)}{2^{n+1}} \qquad (n\geq 1),$$

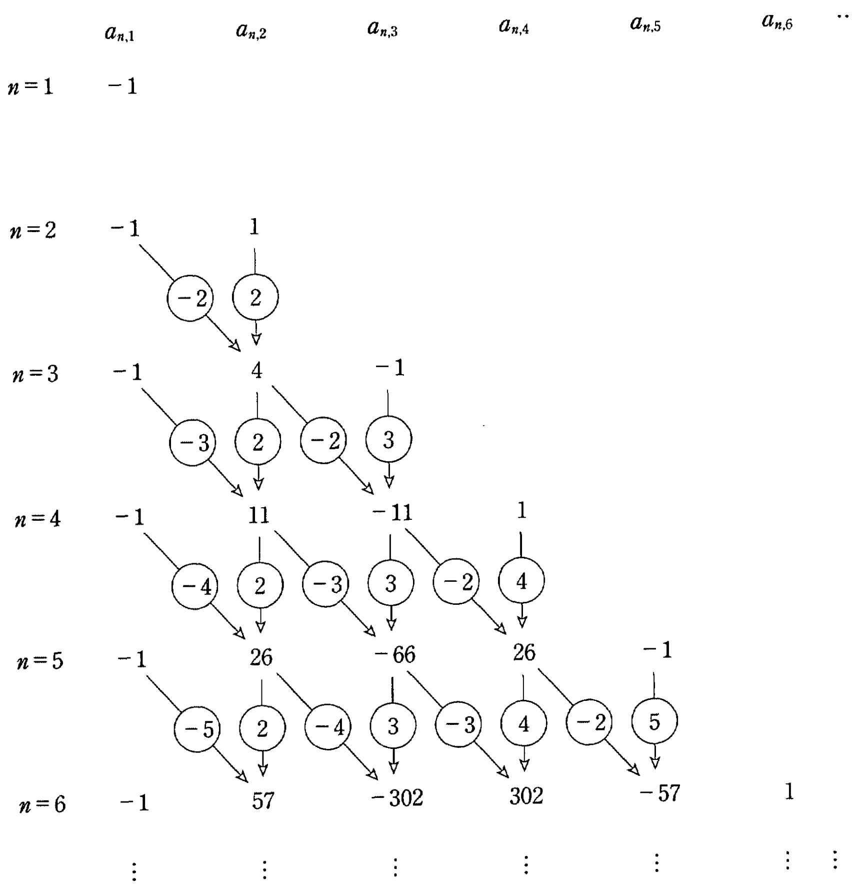
ここで

$$Sum(n)=\sum_{k=1}^{n}a_{n,k}$$

である．

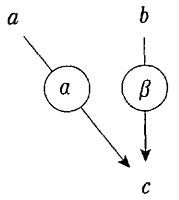
4. $Sum\ (n)$ の計算法

(4)より，我々は（図-1）の方法で(3)の係数を計算することができる．



(図 −1)

（図－1）で，



は，$c=\alpha a+\beta b$という計算方法を表している．

（図–1）の計算方法により，我々は次の結果を得る：

$Sum(1)=-1,\qquad Sum(2)=0,\qquad Sum(3)=2,\qquad Sum(4)=0,$

$Sum(5)=-16,\qquad Sum(6)=0,\qquad \cdots\cdots.$

したがって，我々はベルヌーイ数について次の結果を得る：

$$B_2=\frac{2}{1-2^2}\cdot\frac{-1}{2}=\frac{1}{6},\qquad B_3=0,$$

$$B_4=\frac{4}{1-2^4}\cdot\frac{2}{2^4}=-\frac{1}{30},\qquad B_5=0,$$

$$B_6=\frac{6}{1-2^6}\cdot\frac{-16}{2^6}=\frac{1}{42},\qquad B_7=0,$$

$$\cdots\cdots\ .$$

5. その他の結果

(5)の関係式より，

$$B_{n+1}=\frac{n+1}{1-2^{n+1}}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}a_{n,k},\qquad a_{n,1}=-1$$

であるから，この$a_{n,k}$を求めることにする．そこで

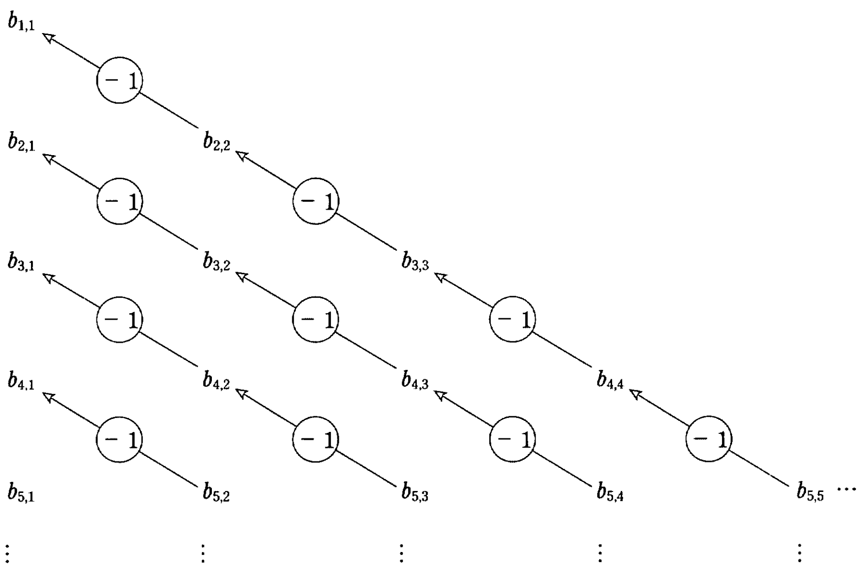
(6)
$$a_{n,k}=\sum_{j=1}^{k}b_{k,j}\cdot j^{n}$$

とすれば，我々は次の結果を得る．

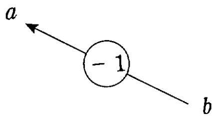
$$
\begin{cases}
b_{k,2} = -b_{k-1,1} \\
b_{k,3} = -b_{k-1,2} \\
\quad\vdots \\
b_{k,j} = -b_{k-1,j-1} \\
\quad\vdots \\
b_{k,k} = -b_{k-1,k-1}
\end{cases}
$$

ここで，$a_{n,k-1} = \sum_{j=1}^{k-1} b_{k-1,j} \cdot j^n$である．

(7)の関係式より，我々は，(6)の係数を（図－2）の方法によって求めることができる：



(図－2)

図－2で，は，$a=(-1)\times b$という計算方法を表している．

これより，　$b_{k,j}=-b_{k-1,\,j-1}=\cdots\cdots=(-1)^{j-1}b_{k-(j-1),\,1}$

が成り立ち，したがって，

$$b_{k,1}=-{}_{n+1}C_{k-1},\qquad b_{k,j}=(-1)^j{}_{n+1}C_{k-j}$$

が成り立つ．

これらのことから，

$$a_{n,1}=-1=-{}_{n+1}C_0$$

$$a_{n,2}=-(n+1)+2^n=-{}_{n+1}C_1+{}_{n+1}C_0\times 2^n$$

$$a_{n,3}=-\frac{1}{2}(n+1)n+(n+1)\times 2^n-3^n$$

$$=-{}_{n+1}C_2+{}_{n+1}C_1\times 2^n-{}_{n+1}C_0\times 3^n$$

であることがわかる．

一般に，

$$a_{n,k}=\sum_{j=1}^{k}b_{k,j}j^n,\qquad b_{k,j}=(-1)^j{}_{n+1}C_{k-j},$$

とすれば，

$$a_{n+1,k}=ka_{n,k}-\{n-(k-2)\}a_{n,k-1}$$

であることが，次のように証明することができる．

実際

$$ka_{n,k}-\{n-(k-2)\}a_{n,k-1}$$

$$=\sum_{j=1}^{k-1}[kb_{k,j}-\{n-(k-2)\}b_{k-1,j}]j^n+kb_{k,k}k^n$$

であり，ここで

$$[kb_{k,j}-\{n-(k-2)\}b_{k-1,j}]j^n$$

$$=(-1)^j{}_{n+2}C_{k-j}j^{n+1}$$

が成り立つ．

さらに

$$
\begin{aligned}
&kb_{k,k}k^{n}\\
&=(-1)^{k}{}_{n+2}C_{0}k^{n+1}
\end{aligned}
$$

であるから，

$$ka_{n,k}-\{n-(k-2)\}a_{n,k-1}=a_{n+1,k}$$

が成り立つ．

6. 結　論

以上のことから，我々はn次のベルヌーイ数B_nを次のようにして求めることができる：

$$B_1=-\frac{1}{2}$$

$$B_{n+1}=\frac{n+1}{(1-2^{n+1})2^{n+1}}\,Sum(n),\qquad (n\geq 1)$$

ここで

$$
\begin{aligned}
Sum\ (n)=&-{}_{n+1}C_0\\
&-{}_{n+1}C_1+{}_{n+1}C_0\times 2^n\\
&-{}_{n+1}C_2+{}_{n+1}C_1\times 2^n-{}_{n+1}C_0\times 3^n\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\\
&-{}_{n+1}C_{n-1}+{}_{n+1}C_{n-2}\times 2^n-\cdots\cdots\cdots+(-1)^n{}_{n+1}C_0\times n^n\\
=&\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n+1}C_k\times S'_n\,(n-k)
\end{aligned}
$$

であり，また$S'_n\,(k)$は

$$S'_n\,(k)=-1+2^n-3^n+\cdots\cdots+(-1)^k k^n$$

を表している．