ベルヌーイ数 B_n について　II

柳 下 公 男

〈目　次〉

1．はじめに

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n$$

によって定められる n 次のベルヌーイ数 B_n を筆者[3] は

$$\frac{x}{e^x-1}-\frac{2x}{e^{2x}-1}=\frac{x}{e^x-1}$$

という恒等式を用いて求めた．

この結果から，ベルヌー数 B_n がどのような約数を持っているのかを調べているのだが，まだ期待しているような結果がえられていない．

A. J. Coleman と P. Ribenboim は1991年に，1713年から1990年までに発表されたベルヌーイ数についてのおよそ2000編に及ぶ主要論文の

著者・タイトル•雑誌名・発表年

だけを記した

Bernoulli Numbers
Bibliography（1713—1990）

を発刊した[1]．

ベルヌーイ数は，

$$\boxed{S(r)=1^{r-1}+2^{r-1}+3^{r-1}+\cdots\cdots\cdots+(x-1)^{r-1}}$$

を求めることとも関連が深いため古くから研究がすすめられていた．

この和は，

$$S(2)=1+2+3+\cdots\cdots\cdots+(x-1)=\frac{1}{2}(x-1)x$$

$$S(3)=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots\cdots+(x-1)^2=\frac{1}{6}(x-1)x(2x-1)$$

$$S(4)=1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots\cdots+(x-1)^3=\frac{1}{4}(x-1)^2x^2$$

$$S(5)=1^4+2^4+3^4+\cdots\cdots\cdots+(x-1)^4$$
$$=\frac{1}{30}(x-1)x(2x-1)(3x^2-3x-1)$$

$$S(6)=1^5+2^5+3^5+\cdots\cdots\cdots+(x-1)^5=\frac{1}{12}(x-1)^2x^2(2x^2-2x-1)$$

$$S(7)=1^6+2^6+3^6+\cdots\cdots\cdots+(x-1)^6$$
$$=\frac{1}{42}(x-1)x(2x-1)(3x^4-6x^3+3x+1)$$

$$S(8)=1^7+2^7+3^7+\cdots\cdots\cdots+(x-1)^7$$
$$=\frac{1}{24}(x-1)^2x^2(3x^4-6x^3-x^2+4x+2)$$

この一般式は，関孝和[(4)]などによって

ベルヌーイ多項式を $B_n(x)=\sum_{i=0}^{n}{}_nC_iB_ix^{n-i}$ とするとき

$$S(r)=\sum_{n=0}^{x-1}n^{r-1}=\frac{1}{r}\{B_r(x)-B_r\}$$ である，

ここで B_r は，$B_0=1$，$B_1=-\frac{1}{2}$，$B_2=\frac{1}{6}$，$B_3=0$，$B_4=-\frac{1}{30}$，$B_5=0$，

$B_6=\frac{1}{42}$，……

と続くベルヌーイ数とする．

（また，$B_3=B_5=B_7=\cdots\cdots B_{n+1}=0\ (n\geqq 1)$ であることが知られている．）

と求められることが発見されている．

また，E. E. Kummer, H. S. Vandiver, L. Carlitz, D. H. Lehmer や E. Lehmer らによって

n が 3 以上の整数のとき，$x^n+y^n=z^n$ を満たす自然数 x，y，z は存在しない．

というフェルマーの最終定理との関連で多くベルヌーイ数に関する論文が発表された．

このフェルマーの最終定理は1994年９月に，A. Wiles によって，証明された．

筆者が発表した論文[2]も一部ベルヌーイ数に関連したものもあり，この書物に引用されている．論文中では詳しく述べられなかったところを次の章で解説することにする．

２．解説

ここで解説するのは，論文（２）の中の

Set $b=b_1 l$ and $w=e^v$, then (9) gives

$$(10)\quad \prod_{i=1}^{l_1} E_i^{\,aip(l-1)}(e^v)=(c^l+l^2\alpha(e^v))^{p(l-1)t}+V(e^{vl}-1)+b_1 l\frac{e^{vl}-1}{e^v-1}.$$

For E's, we have following results ; if $i\neq n$,

$$(11)\quad \underline{\left[\frac{d^{2i}\log E_n(e^v)}{dv^{2i}}\right]_{v=0}=\frac{r^{(l-1)(i-n)}-1}{r^{2i-2n}-1}(-1)^{i+n}\frac{B_i}{2i}(r^{2i}-1)}$$

and if $i=n$,

$$(12)\quad \left[\frac{d^{2n}\log E_n(e^v)}{dv^{2n}}\right]_{v=0}=\frac{(-1)^{n+1}B_n(l-1)(r^{2n}-1)}{4n}$$

という部分で，下線部のベルヌーイ数が出てくるところである．
（記号に関しては原文を参照のこと．）

また，下線部の式はベルヌーイ数が出てきた後，さらに計算して出てくる式なので，ここでは割愛する．

即ち，ここでは

$$E(v)=\frac{v^a-1}{v-1}$$

において，$v=e^x$ とおき，

$$E(x)=\frac{e^{ax}-1}{e^x-1}$$

の両辺の対数をとった式を $2m$ 回微分し，$x=0$ とした式

$$\left[\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}\log E(x)\right]_{x=0}$$

がどうなるかを計算することが目的である．

両辺の対数をとると

$$\log E(x)=\log(e^{ax}-1)-\log(e^x-1)$$

この両辺を微分すると

$$\{\log(E(x))\}'=\frac{ae^{ax}}{e^{ax}-1}-\frac{e^x}{e^x-1}$$

この両辺を x 倍し

$$\begin{aligned}x\{\log E(x)\}'&=\frac{axe^{ax}}{e^{ax}-1}-\frac{xe^{ax}}{e^x-1}\\&=\frac{axe^{ax}-ax+ax}{e^{ax}-1}-\frac{xe^x-1}{e^x-1}\\&=\frac{ax}{e^{ax}-1}-\frac{x}{e^x-1}+a(x-1)\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(ax)^m}{m!}B_m-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}+x(a-1)\end{aligned}$$

と変形してから，両辺を x で割ることにより

$$\{\log E(x)\}'=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(a^m-1)}{m!}x^{m-1}+(a-1)$$

を得る．この両辺を $2m-1$ 回微分すると，$(x^{2m-1})^{(2m-1)}=(2m-1)!$ より

$$\left[\{\log E(x)\}'\right]^{(2m-1)}=\frac{(a^{2m}-1)}{2m}+x\times(x\text{ の多項式})$$

となる．ここで $x=0$ とすれば，

$$\left[\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}\log E(x)\right]_{x=0}=\frac{(a^{2m}-1)}{2m}B_{2m}$$

が得られる．

以上が論文（2）でのベルヌーイ数とのかかわりがある部分で，（1）で紹介された部分の詳説である．

〔参考文献〕

⑴ A. J. Coleman., P. Riebenboim :「Bernoulli Numbers Bibliography」(1713—1990)., Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics No. 87 Queen's University, Kingston, Ontario (1991)
⑵ Kimio Yagishita :「On the Diophantine Equation $\alpha^l+\beta^l+C\gamma^l$」, TRU Math., 7 (1971), p 5-p 10
⑶ 柳下公男：「ベルヌーイ数 B_n について」., 中央学院大学「人間・自然論叢」第18号(2003), p 49-p 56
⑷ 上野健嗣，小川束，小林龍彦，佐藤賢一：「関孝和論序説」，岩波書店(2008)