〔研究ノート〕

完全数について

柳　下　公　男

〈目　次〉

1. 完全数の定義

ギリシャ時代から議論されている完全数とは，次のように定義された数のことを言う：

> 自然数nの正の約数（1およびnを含む）の和を$S(n)$で表すとき
> $S(n)=2n$を満たす数を完全数という．

例えば

（1）6の約数は，1,2.3,6　で

$1+2+3+6=12=2\times 6$

（2）28の約数は，1,2,4,7,14,28　で

$1+2+4+7+14+28=56=2\times 28$

（3）496の約数は，1,2,4,8,16,31,62,124,248,496　で

$1+2+4+8+16+31+62+124+248+496=992=2\times 496$

（4）8128の約数は，1,2,4,8,16,,32,64,127,254,508,1016,2032,4064,8128　で

$1+2+4+8+16+32+64+127+254+508+1016+2032+4064+8128=16256=2\times 8128$

等である．

2. 偶数の完全数

オイラーによって，次の定理が証明されている：

偶数nが完全数であるための条件は、nが
$$2^{r-1}(2^r-1),\quad r\geqq 2$$
の形であって、2^r-1が素数であることである。

例えば

（1）$6=2\times 3=2\times(2^2-1)$，$2^2-1=3$　は素数である．

（2）$28=4\times 7=2^2\times(2^3-1)$，$2^3-1=7$　は素数である．

（3）$496=16\times 31=2^4\times(2^5-1)$，$2^5-1=31$　は素数である．

（4）$8128=64\times 127=2^6\times(2^7-1)$，$2^7-1=127$　は素数である．

等である．

（証明）

2^r-1が素数であれば，$n=2^{r-1}(2^r-1)$の約数の和は
$$\{1+(2^r-1)\}(1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{r-1})$$
$$=2^r\times(2^r-1)=2n$$
であるから，nが完全数であることがわかる．

次に，nを偶数の完全数として
$$n=2^{r-1}k,\quad r>1,\quad (2,k)=1$$
とすれば，$S(n)=2n$より
$$2^rk=S(2^{r-1}k)=S(2^{r-1})S(k)=(2^{r-1})S(k)$$
したがって
$$S(k)=\frac{2^rk}{2^r-1}=k+\frac{k}{2^r-1}$$
ゆえに，$\dfrac{k}{2^r-1}$は整数であるが，$r>1$よりkよりも小さいkの約数である．

すなわち，$S(k)$がkの2つの相異なる約数の和と等しいから，kはただ2つの約数を持つ．

ゆえに，kは素数で，$\dfrac{k}{2^r-1}=1$，$k=2^r-1$.

すなわち，2^r-1は素数である.

また，ここに現れる

$$2^r-1$$

という形の素数を，Mersene数という．そして，

$$r=2,3,5,7,13,17,19,31,61,89,107,127,521,607,1279,2203,2281,3217,4253,4423,9689,9941,11213$$

の時に素数となることが知られており，今後コンピュータの発展に伴い，さらに発見できるであろう.

また，Mersene数が無限にあるかどうかは不明である.

3. 奇数の完全数

２.において，偶数の完全数は確定されたが，奇数の完全数は未だに一つも発見されていない.

ここでは，次の2つのタイプの奇数の完全数は存在しないことを示す.

（１）$n=p^a$，（$a\geqq1$，　pは奇素数）

nが完全数であれば，$S(n)=2n$より

$$2p^a=1+p+p^2+\cdots+p^a$$

より，$p^a=1+p+p^2+\cdots+p^{a-1}$　が成り立たなくてはならないが

$p\geqq3$のとき，$p^a-(1+p+p^2+\cdots+p^{a-1})$

$$=p^a-\frac{p^a-1}{p-1}=\frac{p^{a+1}-2p^a+1}{p-1}=\frac{p^a(p-2)+1}{p-1}>0$$

より，$p^a>1+p+p^2+\cdots+p^{a-1}$　である.

ゆえに，このタイプの完全数は存在しない.

（２）$n=pq^a$,　（p，qは異なる奇素数，$a \geqq 1$）

nが完全数であれば，$S(n)=2n$より

$$2pq^a=(1+p)(1+q+q^2+\cdots+q^a)$$

ここで，p，qはともに奇素数だからaは偶数である．

また，$(1+p,\ p)=1$，$(1+q+q^2+\cdots+q^a,\ p)=1$であるから

$$\begin{cases} 1+p=2q^a \\ 1+q+q^2+\cdots+q^a=p \end{cases}$$

である．

したがって，$p=2q^a-1$，$q>3$より

$$\begin{aligned} &q^a-1-(1+q+q^2+\cdots+q^{a-1}) \\ &=(q-2)(1+q+q^2+\cdots+q^{a-1})>0 \end{aligned}$$

であるからこれを満たすp，qは存在しない．

ゆえに，このタイプの完全数は存在しない．