

[論文]

許容関係について

齋藤 暢 人

- 〈目次〉
0. はじめに
 1. 許容関係と順序関係
 2. 両関係の関係
 3. 許容と順序の変種
 4. 総括と補足
 5. おわりに

0. はじめに

本稿では、許容関係 tolerance relation の論理的性質についていくらかの考察を加える。許容関係とは、反射的かつ対称的という性質をもつ二項関係の総称である。

許容関係の知名度は現状では決して高いとは言えないであろう。では、これを敢えてとりあげるのはなぜであろうか。多種多様な二項関係のうち、その研究が大いに進展しているものとしては、いわゆる順序関係 order relation を挙げることができる。順序関係には部分関係も含まれ、したがっていわゆるメレオロジーも順序論の一分野ともみなされうる。実は、以下で示すように、この順序関係は許容関係と深く関連する。それゆえ、たとえ許容関係そのものがよく知られていなくとも、順序関係とのかかわりを含むその実相はいま以上に明らかにされねばならない。これまでのところで、順序関係と許容関係は相互定義可能なものであることが明らかとなっているが、この事情はより正確に把握されるべきであり、両者の論理的関係の証明が与えられねばならない。本稿で試みるのはこうしたことである。

議論は以下のように進む。まず、許容関係と順序関係の基本的な性質が示され、研究の方針が確定される(1)。次に、許容関係と順序関係がいかなるものであるべきかが示され、一方からの他方の導出が厳密に示される(2)。さらに、順序関係の変種を考えたとき、それぞれに対応する許容関係はいかなるものかが突き止められる(3)。これらの結果を踏まえ、メレオロジーを許容関係の観点からみたときに言えることが考察され、結論とする(4)。

1. 許容関係と順序関係

許容関係の重要性を指摘した先駆的な研究としてよく知られているのは、

数学者ポワンカレによるものである。⁽¹⁾ポワンカレによれば、感覚的事象 A が事象 B と類似していて識別不能であるならば、B は A とも識別不能であり、A はそれ自身とはもちろん識別不能である。つまり、感覚的要素間の識別不可能性は対称性、反射性をもつ。しかし、ここまではよいが、次のような逆説的な事態も起こりうる。物体 A, B, C の重さの感覚について、 $A = B$ であり、かつ $B = C$ であるが、しかし $A < C$ 、というようなことである。つまり、識別不可能性は推移性を必ずしももたない。したがって、このような関係は許容関係ではあるが、順序ではない。このように、許容関係は感覚世界の数学的構造のなかにすら登場しうのごく身近な種類の関係である。

同様の主張は哲学においてもみられ、ネルソン・グッドマンは、『現象の構造』において、われわれが知覚し、行動する世界を現象の世界にとらえ、その中に現れる諸対象、諸要素のあいだの構造を解明しようとした。その際基本概念として採用されたのは、感覚野における諸要素の重複関係である。これは反射的かつ対称的であって、典型的な許容関係であった。⁽²⁾

さらに、数学者ジーマンは、ルネ・トムによって創始されたカタストロフィ理論の心理学・生理学的応用を論じたが、そのとき注目したのが許容関係であった。⁽³⁾

しかし、許容関係の研究には、このような歴とした固有の動機が認められるのであるが、にもかかわらず順序関係とのあいだには深い関連があると言わざるを得ない。グッドマンが確立した「個体計算」はいわゆるメレオロジーでもある。個体計算の中に適切な定義によって部分関係を導入し、順序論を展開することができるのである。

このように、許容関係と順序関係は、それぞれ異なる特徴をもつ関係なのであるが、一定の条件の下では相互に定義可能であり、そのかぎりにおいては論理的に等しいものとなる（両者のうち、任意の一方を原始概念に選ぶことができる、という意味において）。では、その「一定の条件」とは何であろうか。これは本来であればより正確に述べられるべきものであり、周辺の事情

に関する優れた研究もいくらか公表されてはいるものの、しかしなお、これらの関係については明らかにすべき重要な事柄が残されているように感じられる。ここで改めてそれを問い、両者の関係を明らかにしつつ、許容関係とは何であるかということについてさらなる認識を得ようと試みるのは、決して無駄なことではないであろう。

既述のように、許容関係の形式的特徴は、反射的かつ対称的であることである。また、順序関係の形式的特徴は反射的かつ推移的であることである。⁽⁴⁾ (むろん、順序関係にはさまざまな変種があり、ここで示したのは擬順序と呼ばれる最も基本的な関係である。この擬順序関係は、後に論じるように、順序関係を代表するものとしては貧弱である。しかしながら、いかなる順序もこの関係を含まざるを得ないという意味では重要な関係である。) そこで、いわゆる古典的メレオロジー-Classical Mereology (CM) の記号を流用し、許容関係を $x < > y$ 、順序関係を $x < y$ で表せば、これらの特徴は次のように表現できる。⁽⁵⁾

$$(T1) \quad x < > x$$

$$(T2) \quad x < > y \rightarrow y < > x$$

$$(O1) \quad x < x$$

$$(O2) \quad x < y \wedge y < z \rightarrow x < z$$

これらの関係は、一見全く異質なものであるように思われるが、実はある条件の下で相互に定義することができる。すなわち、以下のように、一方によって他方を定義するのである。

$$(DT) \quad x < > y : = \exists z (z < x \wedge z < y)$$

$$(DO) \quad x < y : = \forall z (z < > x \rightarrow z < > y)$$

この定義を利用すると、 $< >$ の基本性質から $<$ の基本性質が導かれ、 $<$ の

基本性質から $\langle \rangle$ の基本性質が導かれる（たとえば、 $\langle \rangle$ の反射性は、 \langle の反射性から直ちに導かれる。また、 \langle の反射性は、 $\langle \rangle$ によって書き換えた文が論理的真理であることからほぼ自明である）。

しかしながら、このように、それぞれの関係の本質は、その基本的性質を枚挙すれば解明されるのかといえば、そうではない。というのも、一方の概念を他方の概念によって定義することの妥当性もまた示されねばならないが、このままではそれは不可能だからである。すなわち、 $\langle \rangle$ の基本性質からは、 \langle を $\langle \rangle$ によって定義することの妥当性を導くことはできず、逆に、 \langle の基本性質からは、 $\langle \rangle$ を \langle によって定義することの妥当性を導くことはできない。正確に言えば、 \langle における $\langle \rangle$ の定義の必要条件しか導くことはできない。

筆者が考えるかぎりでは、このような事態が惹起される原因は、それぞれの関係の本質が十分に把握されていないことにあるように思われる。それゆえ、上述のような基本性質を満たしつつ、さらに相互定義可能な基本的な関係をみつけだす必要があるのである。

2. 両関係の関係

2.1 関係の体系化

以上のような問題を解決するためには、許容関係と順序関係がもつべき性質を再考する必要がある。両関係は、それぞれが次のような公理系によって特徴づけられると考えられる。その上で、それぞれの公理系において他方の関係を定義すると、一方の体系から他方の体系が得られる。すなわち両者は演繹的に同値である。

順序関係の体系 SO

公理

$$\text{AO.1} \quad x < y \wedge y < z \rightarrow x < z$$

$$\text{AO.2} \quad \forall z \forall u (u < z \wedge u < x \rightarrow \exists v (v < z \wedge v < y)) \rightarrow x < y$$

定義

$$\text{DO.1} \quad x < > y := \exists z (z < x \wedge z < y)$$

許容関係の体系 ST

公理

$$\text{AT.1} \quad x < > y \leftrightarrow \exists u \forall v (v < > u \rightarrow v < > x \wedge v < > y)$$

定義

$$\text{DT.1} \quad x < y := \forall z (z < > x \rightarrow z < > y)$$

これらの体系の同値性を実際に確かめることとする。はじめに SO から ST が帰結することを示し、次に、その逆、つまり ST から SO が帰結することを示す。

2.2 SO から ST が導かれることの証明

$$\text{TO.1} \quad x < x$$

証明：AO.2より $\forall z \forall u (u < z \wedge u < x \rightarrow \exists v (v < z \wedge v < y)) \rightarrow x < y$. 代入 x/y より $\forall z \forall u (u < z \wedge u < x \rightarrow \exists v (v < z \wedge v < x)) \rightarrow x < x$. 論理の変形より $\forall z (\exists u (u < z \wedge u < x) \rightarrow \exists v (v < z \wedge v < x)) \rightarrow x < x$. 前件は明らかに論理的真理であるから、 $x < x$. ■

$$\text{TO.2} \quad x < y \rightarrow \forall z (z < > x \rightarrow z < > y)$$

証明： $x < y$ および $a < > x$ と仮定する。DO.1より $\exists z (z < a \wedge z < x)$. b

$a \wedge b < x$ と仮定する。ゆえに $b < x$ 。仮定 $x < y$ から、AO.1により、 $b < y$ 。他方で $b < a$ 。ゆえに $b < a \wedge b < y$ 。ゆえに $\exists z (z < a \wedge z < y)$ 。DO.1より、 $a < y$ 。ゆえに $a < x \rightarrow a < y$ 。ゆえに $\forall z (z < x \rightarrow z < y)$ 。■

TO.3 $x < y \leftrightarrow \forall z (z < x \rightarrow z < y)$

証明：必要性は TO.2から明らか。十分性を示す。AO.2より $\forall z \forall u (u < z \wedge u < x \rightarrow \exists v (v < z \wedge v < y)) \rightarrow x < y$ 。ゆえに、論理変形により、 $\forall z (\exists u (u < z \wedge u < x) \rightarrow \exists v (v < z \wedge v < y)) \rightarrow x < y$ 。DO.1より $\forall z (z < x \rightarrow z < y) \rightarrow x < y$ 。■

TO.4 $x < y \leftrightarrow \exists u \forall v (v < u \rightarrow v < x \wedge v < y)$

証明：DO.1より $x < y \leftrightarrow \exists z (z < x \wedge z < y)$ 。TO.3より、右辺は $\exists z (\forall u (u < z \rightarrow u < x) \wedge \forall v (v < z \rightarrow v < y))$ 。さらに $\exists z \forall v (v < z \rightarrow v < x) \wedge (v < z \rightarrow v < y)$ 。さらに $\exists z \forall v (v < z \rightarrow v < x \wedge v < y)$ 。すなわち $\exists u \forall v (v < u \rightarrow v < x \wedge v < y)$ 。■

以上の証明から言えるのは、まず、AO.1と TO.1より、SO は擬順序関係である、ということである。

また、以下が示されたことにより、SO は許容関係でもある。

イ。TO.4として AT.1が証明された。

ロ。TO.3として DT.1が証明された。

2.3 ST から SO が導かれることの証明

TT.1 $x < x$

証明： $\forall v (v < x \rightarrow v < x)$ は定理。 $\forall v (v < x \rightarrow v < x \wedge v < x)$ もまた定理。それゆえ $\exists u \forall v (v < u \rightarrow v < x \wedge v < x)$ 。AT.1より x

$\langle \rangle x$. ■

TT.2 $x \langle \rangle y \rightarrow y \langle \rangle x$

証明： $x \langle \rangle y$ とする。AT.1より、 $\exists u \forall v (v \langle \rangle u \rightarrow v \langle \rangle x \wedge v \langle \rangle y)$ 。
すると明らかに、 $\exists u \forall v (v \langle \rangle u \rightarrow v \langle \rangle y \wedge v \langle \rangle x)$ 。ゆえに、再び
AT.1より、 $y \langle \rangle x$. ■

TT.3 $x \langle y \wedge y \langle z \rightarrow x \langle z$

証明： $x \langle y \wedge y \langle z$ と仮定する。DT.1より、 $\forall v (v \langle \rangle x \rightarrow v \langle \rangle y)$ お
よび $\forall v (v \langle \rangle y \rightarrow v \langle \rangle z)$ 。 $a \langle \rangle x$ と仮定する。すると、明らかに $a \langle$
 $\rangle z$ 。よって $a \langle \rangle x \rightarrow a \langle \rangle z$ 。したがって、 $\forall v (v \langle \rangle x \rightarrow v \langle \rangle z)$ 。
DT.1より $x \langle z$. ■

TT.4 $x \langle \rangle y \leftrightarrow \exists z (z \langle x \wedge z \langle y)$

証明：必要性

$x \langle \rangle y$ と仮定する。AT.1より $\exists z \forall v (v \langle \rangle z \rightarrow v \langle \rangle x \wedge v \langle \rangle y)$ 。 $\forall v$
($v \langle \rangle a \rightarrow v \langle \rangle x \wedge v \langle \rangle y$) と仮定する。ゆえに $\forall v (v \langle \rangle a \rightarrow v \langle \rangle x)$
 $\wedge \forall v (v \langle \rangle a \rightarrow v \langle \rangle y)$ 。DT.1より $a \langle x \wedge a \langle y$ 。よって $\exists z (z \langle x \wedge z \langle$
 $y)$ 。

十分性

$\exists z (z \langle x \wedge z \langle y)$ と仮定する。 $a \langle x \wedge a \langle y$ 。DT.1より $\forall v (v \langle \rangle a \rightarrow v$
 $\langle \rangle x) \wedge \forall v (v \langle \rangle a \rightarrow v \langle \rangle y)$ 。ゆえに $\forall v (v \langle \rangle a \rightarrow v \langle \rangle x \wedge v \langle \rangle y)$ 。
よって $\exists z \forall v (v \langle \rangle z \rightarrow v \langle \rangle x \wedge v \langle \rangle y)$ 。AT.1より $x \langle \rangle y$ 。ゆえに x
 $\langle \rangle y$. ■

TT.5 $\forall z \forall u (u \langle z \wedge u \langle x \rightarrow \exists v (v \langle z \wedge v \langle y)) \rightarrow x \langle y$

証明：DT.1より、 $\forall z (z \langle \rangle x \rightarrow z \langle \rangle y) \rightarrow x \langle y$ 。TT.4より、 $\forall z (\exists u (u$
 $\langle z \wedge u \langle x) \rightarrow \exists v (v \langle z \wedge v \langle y)) \rightarrow x \langle y$ 。ゆえに $\forall z \forall u (u \langle z \wedge u \langle x \rightarrow$

$$\exists v(v < z \wedge v < y) \rightarrow x < y. \blacksquare$$

TT.1および TT.2より, ST は許容関係である.

また, 以下の諸事実が示されたことにより, ST は順序関係でもある.

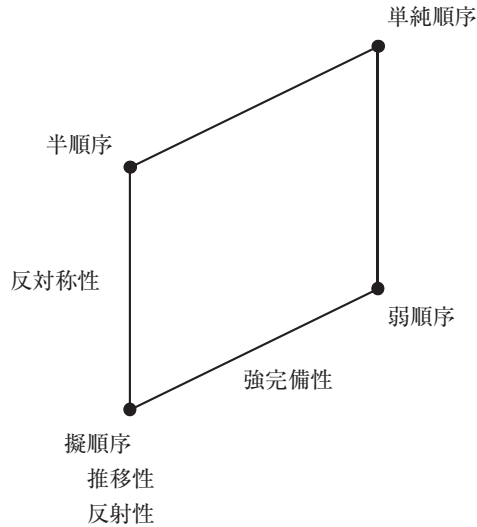
- イ. AO.1は TT.3として証明された.
- ロ. AO.2は TT.5として証明された.
- ハ. DO.1は TT.4として証明された.

以上の議論から, 許容関係と順序関係を, それぞれどのような関係として特徴づけるべきであるかが明らかとなった.

3. 許容と順序の変種

SO は, それが満たす性質からみて, いわゆる擬順序 quasi-order に相当する. これは, 順序の最も基本的な性質に相当するものであり, きわめて重要な関係である. しかし, その内容は非常に単純で, これのみで順序を論じるのは不可能である. 擬順序にさらに性質を付加することによって, 別種の有用な順序を生成することができる.

たとえば, 擬順序に反対称性 anti-symmetry を付加したものは, いわゆる半順序 partial order となる. また, 擬順序に強完備性 strong completeness を付加したものは, いわゆる弱順序 weak order となる. 反対称性と強完備性の両方を付加することも可能であり, そのとき結果するのは, 単純順序 simple order である. この事情はハッセ図を用いて示せば, 以下のようになる.



【図1 順序の変種】

すると、ここで問題となるのは、これらのより強い順序に対応するのはどのような許容関係なのか、ということであろう。そのような許容関係は、順序関係が強化されるのに呼応して、より強い関係でなければならない。では、基礎となる許容関係にいかなる性質を付加すれば、対応する変種を生み出すことができるのであろうか。

まず半順序関係について考えてみると、それに対応する許容関係は、おそらく以下のような「外延性 extensionality」とでも呼ぶべきものをもたねばならない、と考えられる。

$$(3.1) \quad \forall z(z < x \leftrightarrow z < y) \rightarrow x = y$$

つまり、改めて半順序関係を考えたとき、それに対応する許容関係は、この外延性をも満たすような許容関係であろうと考えられる。そこで、半順序関係の体系を考えることとし、これを SPO と呼ぶことにすると、強い許容

関係の体系は SET とでも呼ぶことができよう。そして両者は、それぞれ以下のような体系になると考えられる。

半順序関係の体系 SPO

SO の公理・定義

$$\text{AO.3} \quad x < y \wedge y < x \rightarrow x = y$$

外延的許容（強い許容）関係の体系 SET

ST の公理・定義

$$\text{AT.2} \quad \forall z (z < x \leftrightarrow z < y) \rightarrow x = y$$

このように、既出の体系に新しい性質を追加することによって得られた二つの体系は、以下のように、相互に導出可能である。

SPO における SET の文の導出

$$\text{TO.5} \quad \forall z (z < x \leftrightarrow z < y) \rightarrow x = y$$

証明： $\forall z (z < x \leftrightarrow z < y)$ と仮定する。 $\forall z (z < x \rightarrow z < y)$ かつ $\forall z (z < y \rightarrow z < x)$ 。TO.3より $x < y$ かつ $y < x$ 。ゆえに、AO.3より、 $x = y$ 。■

SET における SPO の文の導出

$$\text{TT.6} \quad x < y \wedge y < x \rightarrow x = y$$

証明： $x < y \wedge y < x$ とおく。DT.1より $\forall z (z < x \rightarrow z < y)$ かつ $\forall z (z < y \rightarrow z < x)$ 。よって、 $\forall z (z < x \leftrightarrow z < y)$ 。よって、AT.2より、

$$x = y. \blacksquare$$

したがって、新しい体系同士もまた演繹的に同値である。

次に、弱順序関係に対応する許容関係について考えてみよう。弱順序関係を特徴づける性質は、以下の強完備性である。

$$x < y \vee y < x$$

これに対応する許容関係の性質は以下である。

$$x < > z \wedge y < > w \rightarrow y < > z \vee x < > w$$

これは交差性 intersectionality とでも呼ぶことができるであろう。⁽⁶⁾

これらを擬順序、許容の公理として付加したとき、それぞれが他方から導かれることを示そう。新しい公理系は、弱順序の体系 SWO と交差性をもつ許容関係である交差許容関係の体系 SIT の二つである。

弱順序の体系 SWO

SO の公理・定義

$$AO.4 \quad x < y \vee y < x$$

交差許容関係の体系 SIT

ST の公理・定義

$$AT.3 \quad x < > z \wedge y < > w \rightarrow y < > z \vee x < > w$$

SWO における SIT の文の導出

$$\text{TO.6} \quad x < z \wedge y < w \rightarrow y < z \vee x < w$$

補題をひとつ示しておく.

$$\text{LO.1} \quad \text{SO において } x < y \leftrightarrow y < x$$

LO.1の証明：TO.4より明らか.

TO.6の証明： $x < y \vee y < x$ は前提. $x < y$ とする (仮定). TO.3より, $z < x \rightarrow z < y$. ゆえに $x < z \wedge y < w \rightarrow y < z \vee x < w$ (論理と LO.1). $y < x$ とする (仮定). TO.3より $w < y \rightarrow w < x$. ゆえに $x < z \wedge y < w \rightarrow y < z \vee x < w$ (論理と LO.1). ゆえに $x < z \wedge y < w \rightarrow y < z \vee x < w$. ■

SIT における SWO の文の導出

$$\text{TT.7} \quad x < y \vee y < x$$

証明： $x < z \wedge y < w \rightarrow y < z \vee x < w$ とする. 論理の変形により $\neg x < z \vee \neg y < w \vee y < z \vee x < w$. さらに $\neg x < z \vee y < z \vee \neg y < w \vee x < w$. さらに, TT.2と論理の変形により, $z < x \rightarrow z < y \vee w < y \rightarrow w < x$. ゆえに $x < y \vee y < x$. ■

したがって, これらの両体系もまた演繹的に同値である. さらに, 単純順序に対応する許容関係がいかなるものなのかもまた, これまでの考察から明らかであろう.

ここで、これまでの議論の帰結について考えてみよう。結局のところ、

$$(*) \quad x < > y \leftrightarrow \exists z (z < x \wedge z < y)$$

$$(**) \quad x < y \leftrightarrow \forall z (z < > x \rightarrow z < > y)$$

となるように公理を定め、定義をおくならば、 $<$ は擬順序となり、 $< >$ は許容となる。SOにおいては $(*)$ を定義としたが、 $(**)$ は、実質的には公理AO.2として採用された。STにおいては、 $(**)$ を定義としたが、 $(*)$ は、実質的には公理AT.1として採用されたのであった。そして、これらを土台にして、半順序、弱順序などの変種を構成することはもちろん可能であり、さらに対応する許容関係の変種を与えることも可能である。

4. 総括と補足

本稿では、これまで扱ってきた順序関係を擬順序と呼んでいたが、これはやや正確性を欠く。これは擬順序を満たす関係であり、本来の擬順序よりも豊かな内容を含むはずである。とくに、以下の公理は特徴的であった。

$$(4.1) \quad \forall z \forall u (u < z \wedge u < x \rightarrow \exists v (v < z \wedge v < y)) \rightarrow x < y$$

これは一般には見慣れない式であるが、要するに、以下のことを別のかたちで述べているに過ぎない（定義による変形）。

$$(4.2) \quad \forall z (z < > x \rightarrow z < > y) \rightarrow x < y$$

したがって、本稿で考察の対象となったのは、厳密には、この性質を持つような擬順序あるいは半順序なのである。

さて、この逆である以下は定理である。

$$(4.3) \quad x < y \leftrightarrow \forall z (z < x \rightarrow z < y)$$

(余談であるが、メレオロジーをアリストテレス的論理と対応させて理解した場合、これは第三格 AII 式 (Datisi) にあたる。) したがって、先の性質 (4.2) をもつような半順序においては、 $<$ は、いわゆる埋め込み embedding となっている。つまり

$$(4.4) \quad x < y \leftrightarrow \forall z (z < x \rightarrow z < y)$$

がなりたつ。したがって、ここでは、このような半順序を「許容埋め込み半順序」と呼ぶことができるであろう。

また、性質 (4.2) には一般に通用する名前がないが、以上の文脈から「許容埋め込み」と称して差し支えないだろう。

これは、古典的メレオロジー-CM においては、公理である強補足性から帰結する定理である。

$$(4.5) \quad \neg x < y \rightarrow \exists z (z < x \wedge z > y)$$

対偶より以下の (4.6) が出るが、ここからさらに (4.2) が出るのは明らかであろう。

$$(4.6) \quad \forall z (z < x \rightarrow z > y) \rightarrow x < y$$

したがって、古典的メレオロジー-CM は、しばしば指摘されるようにもちろん半順序ではあるが、そればかりではなく、その強補足性により、許容関係の理論としてみたならば、許容埋め込み半順序でもあるのである。さら

に、そうであるがゆえに、CMは、許容関係の観点からみた場合、すでに述べたような意味において、外延的でもあるのである。

5. おわりに

これまでの考察により、順序関係と許容関係の相互定義可能性とはいかなることであるのかが明らかとなった。また、その結果、半順序関係と許容関係の、ある種の相補的關係にも光を当てることができた。順序関係の重要性・有用性はすでに広く認知されているが、許容関係それ自体がもつ意義もまた、考察を通じて明らかとなったと言えよう。許容関係に注目することで、メレオロジーを新たな角度から捉え直すこともできた。

順序関係にはほかにも多様な変種があり、したがって許容関係との関係もまたさらに複雑でありうる。そうした諸事情に関してもさらなる研究が必要であるが、いまは稿を改めることとし、ひとまず筆を擱きたい。

〔文献〕

〔非邦語〕

Goodman, N., 1977, *The Structure of Appearance*, Kluwer

Poincaré, H., 1902/1917, *La Science et l'Hypothèse* (河野伊三郎訳『科学と仮説』岩波文庫, 1938)

Smyth, M. B., and J. Webster, 2007, 'Discrete Spatial Models', in Aileo *et al.* (eds.), *Handbook of Spatial Logic*, Kluwer, 713-798

〔邦語〕

齋藤暢人, 2014, 「メレオロジーの論理学」, 松田毅編著『部分と全体の哲学——歴史と現在』春秋社, 1-39

野口広, 2009, 『トポロジーの世界』ちくま学芸文庫 (『新版 トポロジーの世界』ダイヤモンド社, 1974の再刊)

〔注〕

- (1) Poincaré (1902/1907; 1938) の第二章「数学的量和経験」における一節「物理的連続」をみよ.
- (2) Goodman (1977)
- (3) ジーマンの研究は野口 (2009) に紹介がある.
- (4) 反射性をもたない厳密順序関係もありうるが, 主要な厳密順序関係は適切な定義の下で反射的な順序関係と同値になるので, 本稿では順序関係を反射的なものとして扱う.
- (5) CM については齋藤 (2014) などを参照されたい.
- (6) この名称は筆者によるもので, 一般的ではない.