〔論文〕

高階様相論理における原子論

――メレオトポロジー的分析――

齋　藤　暢　人

〈目　次〉

0．はじめに
1．高階様相論理の基本概念
2．原子論
3．補題の証明
4．定理と証明
5．もうひとつの定理
6．おわりに

0．はじめに

高階様相論理は，厳密含意，両立可能性など，様相的含意をもつ論理的関係の体系としてとらえることができるが，これらの関係はメレオトポロジーの基本概念に対応している．したがって，高階様相論理における論証は，メレオトポロジーにおける論証と共通点をもっており，後者の概念的資源を利用して理解することができる．本稿では，高階様相論理における原子論に関する諸命題の証明を題材に取り上げ，この作業の遂行によって，その論証過程のなかに実際にメレオトポロジー的要素が認められることを確かめる．したがって本稿は，メレオトポロジーが実際にどのように用いられうるのかを例示するという特殊な目的をもつ研究であるが，その具体性は一般的な価値をいくらかはもちうるであろう．

議論は次のように進む．はじめに，論文全体の基礎として，高階様相論理の基本概念を提示し，その論理的特性について説明する（1）．次に，本来はメレオロジーにおいて定式化されうる原子論が，メレオトポロジーにおいても定式化可能であり，それゆえ高階様相論理においても定式化できることを示す（2）．そして，ひとつの補題を証明したのち（3），高階様相論理における原子論のいくつかの主張のあいだの同値性を証明する（4）．さらに，原子論に関係するある定理を証明する（5）．最後に考察を振り返り，様相論理とメレオトポロジーの関係について見解を述べて結論とする（6）．

1．高階様相論理の基本概念

通常，様相論理は，必然性あるいは可能性を基本的な概念として認めたうえで体系化されるが，不可能性，非必然性などの他の様相概念もまた，論理的にはこれらに代わりうることがわかっている．それゆえ，原始概念としてはこれらのうちのひとつを選択しつつも，それぞれを個別に表現するような

体系を考えるのは自然である．本稿では必然性□を原始概念とし，他の様相概念である可能性◇，不可能性◆，非必然性■を，以下のように定義されるものとして導入する．

◇p：=¬□¬p

◆p：=□¬p

■p：=¬□p

他方で，様相論理における基本的概念を厳密含意⇒とし，関連する諸概念すなわち両立可能性○，両立不可能性●，厳密不含意⇐を，それによって定義されるものとして導入することもできる．

p○q：=¬（p⇒¬q）

p●q：=p⇒¬q

p⇐q：=¬（p⇒q）

これらはいずれも文のあいだの様相的な論理的関係である．ここではこれらを様相関係と呼ぶこととする．

様相概念と様相関係の対応関係については以前いくらか検討したので，ここではその基本事項を以下の議論の準備のためにまとめておくこととする[(1)]．様相関係は様相概念によって言いかえられるが，その一方で，様相概念が様相関係によって言いかえられることも可能である．

【表1.1　様相概念による様相関係の分析】

p⇒q	□（p→q）
p○q	◇（p∧q）
p●q	◆（p∨q）
p⇐q	■（p→q）

【表1.2　様相関係による様相概念の分析】

$\Box$ p	¬p ⇒ p
◇ p	p ○ p
◆ p	p ● p
■ p	¬p ⇐ p

様相概念を様相関係によって理解するというアイディアは比較的古いもので，ルイス，ラングフォードやオスカー・ベッカーといった現代様相論理研究の開拓者たちの研究にはみられたが，廃れて久しく，今日あまり一般的とは言えない．しかし以下のことに注意すれば，こうしたことが成り立つのは自明であろう(2)．

$$
\begin{aligned}
\neg p \Rightarrow p &\leftrightarrow \Box(\neg p \rightarrow p)\\
&\leftrightarrow \Box(\neg\neg p \vee p)\\
&\leftrightarrow \Box(p \vee p)\\
&\leftrightarrow \Box\, p
\end{aligned}
$$

さて，周知のように，様相概念は，それぞれが他のいずれの概念によっても言い換えられるという意味において対等である．以下の表において各列は同値である．

【表1.3　様相概念の相互関係】

□ p	¬□¬p	□¬p	¬□ p
¬◇¬p	◇ p	¬◇ p	◇¬p
◆¬p	¬◆ p	◆ p	¬◆¬p
¬■ p	■¬p	¬■¬p	■ p

このことから容易に推測できるように，様相関係もまた他の関係によって言い換えられる．各列は同値である．

【表1.4　様相関係の相互関係】

$p \Rightarrow q$	$\neg(p \Rightarrow \neg q)$	$p \Rightarrow \neg q$	$\neg(p \Rightarrow q)$
$\neg(p \bigcirc \neg q)$	$p \bigcirc q$	$\neg(p \bigcirc q)$	$p \bigcirc \neg q$
$p \bullet \neg q$	$\neg(p \bullet q)$	$p \bullet q$	$\neg(p \bullet \neg q)$
$\neg(p \Leftarrow q)$	$p \Leftarrow \neg q$	$\neg(p \Leftarrow \neg q)$	$p \Leftarrow q$

これらの事実はきわめて基本的で周知のことではあるが，様相論理の文を変形するための補題として利用できるという点で実用的な価値をもっている．本稿ではそうした意義を具体的に明らかにしてゆこうと思う．

2．原子論

さて，本稿の主題は限定されたものであり，様相論理において扱いうる無数の主題のうちのひとつである原子論である．まず，この原子論という主張はいかなるものなのか．それを確認することから議論を始めることとしよう．

実は，原子論は，様相論理とは本来は（建前上）無関係である古典的メレオロジー（CM）において定式化される主張である．原子とは直観的には「（真）部分をもたないもの」として表象できるが，それは，メレオロジーの述語である「x は y の真部分である」という関係 $x \ll y$ を用いて，以下のように表現することができるであろう．

x は原子である：$= \neg \exists y\ y \ll x$

この定義は$\forall y\ (y < x \rightarrow x = y)$と同値であり，部分概念$<$を含むので，原子論という思想がメレオロジー的なものであることに疑いの余地はないであろうが，しかし，一見したところ，こうしたテーゼは様相論理とは接点をもたないようにみえるかもしれない．

だが実際には，以下で示すように，概念の連鎖が両者を結びつけている．

メレオロジーと様相論理のあいだを媒介するのは古典的メレオトポロジー（CMT）である．古典的メレオロジーの諸概念の論理的性質は，対応する古典的メレオトポロジーの諸概念に引き継がれており，それゆえメレオトポロジーにおいてもまた原子論を定式化することができるのである．そしてもちろん，メレオトポロジーと高階様相論理の対応は代数的に見て明らかである．メレオトポロジーによる媒介とはこういうことである．

２．１．メレオロジーにおける原子論

はじめに，メレオロジーにおける原子論の定式化についてみてみよう．メレオロジーにおける原子論については以前論じたので，ここではその詳細には立ち入らず，概略の紹介にとどめる[3]．原子論の定義は上記のとおりであるが，実はこれ以外にも定義する方法があり，つまり原子論は多様なしかたで表現できる．

（１）　$x < y \lor x < \sim y$
（２）　$x < y \to y < x$
（３）　$x <> y \to x < y$
（４）　$x <> y \land y <> z \to x <> z$
（５）　$z < x + y \leftrightarrow z < x \lor z < y$

これらの諸テーゼには同値な別表現がありうる．たとえば（１）は $x < y \lor x >< y$ である．

これらは，いずれも原子論とはなにかについて述べている，論理的には同値な命題であるが，それぞれがもつ直観的内容は大きく異なるものであろう．原子論とは，＜と＜＞のあいだの大小関係の逆が成り立つことであり（（３）），さらに，部分関係と重複関係を同一視し，したがって部分関係が対称的となることであり（（２）），また，重複関係が推移的となることでもある（（４））．

２．２．メレオトポロジーにおける原子論

次に，メレオトポロジーにおける原子論の定式化についてみてみよう[4]．まず注意すべきは，メレオトポロジーの基本概念のあいだには，メレオロジーの基本概念のあいだにあったのと相似した関係がある，ということである．それゆえ，両者の論理的性質もまたよく似ている．単調性に注目しよう．↑R は左上方単調，↓R は左下方単調，R↑は右上方単調，R↓は右下方単調を表すとすると，メレオロジーの述語とメレオトポロジーの述語は以下の表２.１のように性質を共有している．また，メレオトポロジーの述語はメレオロジーの述語と位相作用素の組み合わせによって書き換えることができるが，こうしたことが可能なのは，本質的には，位相作用素に先の様相概念と同様の性質があり，開核 i を原始概念としたとき，閉包 c，外部 e，残部 r をそれぞれを～i～，i～，～i で表すことができることによる．

【表２.１　諸述語の基本性質】

メレオロジー	単調性	メレオトポロジー		
x < y	↓R↑	Dxy	x < iy	x >< ry
x <> y	↑R↑	Cxy	x <> cy	x > ey
x >< y	↓R↓	Exy	x >< cy	x < ey
x > y	↑R↓	Rxy	x > iy	x <> ry

以上を念頭に置いたうえで考察すると，こうした関連性の必然的な帰結として次が成り立つ．すなわち，（α）メレオロジーが原子論的であることと，（β）メレオトポロジーが原子論的であることは同値である．

証明：

（α から β）：Cxy とする．x <> cy となる．公理から cx <> y．メレオロジーが原子論的であることから cx < y（大小関係の逆）．CMT の公理から x < iy．ゆえに Dxy．

（βからα）：$x <> y$とする．閉包の性質から$x <> cy$．つまりCxy．メレオトポロジーが原子論的であることからDxy（大小関係の逆）．つまり$x < iy$．開核の性質から$x < y$．■

また，先のメレオロジーにおける原子論の定義に呼応して，次のようなメレオトポロジーにおける原子論の定義がある．

$$\forall y(Dyx \rightarrow x = y)$$

これが，先のメレオロジーにおける原子論のテーゼ（２）に対応するような次の主張と同値であることは容易に確かめられる．

$$Dxy \rightarrow Dyx$$

証明：

（必要性）：$\forall y$（$Dyx \rightarrow x = y$）とする．Daxとおく．すると$a = x$．よってDxa.

（十分性）：Daxと仮定する．すると$a < x$．さらに，原子論よりDxaである．すると$x < a$．よって，CMの公理より$x = a$．ゆえに．$\forall y$（$Dyx \rightarrow x = y$）．■

ここから，メレオロジーの述語を対応するメレオトポロジーの述語に置き換えることにより，以下のように，メレオトポロジーにおける原子論を定式化することができる．

（１）　$Dxy \vee Dx{\sim}y$

（２）　$Dxy \rightarrow Dyx$

（３）　$Cxy \rightarrow Dxy$

（4）　$Cxy \wedge Cyz \rightarrow Cxz$

（5）　$Dz(x + y) \leftrightarrow Dzx \vee Dzy$

メレオロジーの場合と同様，これらの諸テーゼには同値な別表現がありうる．たとえば（1）は $Dxy \vee Exy$ である．

以上より，メレオトポロジーにおける原子論とはなにかという問いに対して，次のように答えることができる．すなわち，メレオトポロジーにおいて原子論が成り立つならば，内的部分と連結のあいだの大小関係の逆が成立することによって両者の区別が消失し，内的部分が対称的でもあり，また，連結が推移的でもあるようになる．

これまでの考察から，われわれの今後の議論の方向性を決定づけるような，原子論の本質的な内容がその姿を現したように思われる．まず，メレオロジーは，部分関係＜による順序論とも，また，重複関係＜＞による許容関係の理論ともみることができる．また，メレオトポロジーは，やはり内的部分関係 D による順序関係の理論であると同時に，連結関係 C による許容関係の理論でもある．だが，いずれの理論においても，原子論が成り立つとき，両関係の区別は消失する．つまり，原子論の本質は，順序関係と許容関係の区別を無化するところにある．

ここからは当然次のように推測されるであろう．すなわち，これまで明らかになったことに鑑みれば，順序関係である厳密含意関係⇒と許容関係である両立可能性関係○をもつ高階様相論理においてもまた，原子論を定式化することは可能なのではないか（厳密含意が反射性，反対称性，推移性をもち，両立可能性が反射性，対称性をもつことは明らかである）．

２．３．高階様相論理における原子論

では，高階様相論理における原子論とはどのようなものとなるであろうか．これまで紹介してきたメレオトポロジーの基本概念と，先に前節において既に導入しておいた高階様相論理における様相関係とのあいだには，以下

のように対応をつけられる．

【表２.２　メレオトポロジーと高階様相論理】

メレオトポロジー	高階様相論理
Dxy	$p \Rightarrow q$
Cxy	p ○ q
Exy	p ● q
Rxy	$p \Leftarrow q$

この対応に基づき，メレオトポロジーにおける原子論の諸テーゼを高階様相論理におけるものに書き換えることができる．メレオロジー，メレオトポロジーの場合とは異なり，若干の条件を付加する必要があるが，それを除けば，両者が論理構造の中核的な部分を共有していることは明らかであろう．

（1）　$\Diamond p \wedge \forall q\,(p \Rightarrow q \vee p \Rightarrow \neg q)$
（2）　$\Diamond p \wedge \forall q\,((\Diamond q \wedge q \Rightarrow p) \rightarrow p \Rightarrow q)$
（3）　$\forall q\,(\neg\,(p \Rightarrow q) \leftrightarrow p \Rightarrow \neg q)$
（4）　$\Diamond p \wedge \forall q\,\forall r\,(p \bigcirc q \wedge q \bigcirc r \rightarrow p \bigcirc r)$
（5）　$\Diamond p \wedge \forall q\,\forall r\,(p \Rightarrow q \vee r \rightarrow p \Rightarrow q \vee p \Rightarrow r)$

（1）から（3）は，和田和行によってすでに論じられたものであるが，（4）と（5）は論じられていない[(5)]．しかし，以下で示してゆくように，これらもやはり原子論のテーゼの一表現である．メレオトポロジーを念頭に置いた論理構造の分析により，こうした同値な表現を見出しえたのは本稿の方針のささやかな成果である．少し詳しく説明しておこう．

上記の諸テーゼのなかには，自明な変形によって重要な概念的連関が明るみに出るようなものが含まれている．上記の（1）が$\Diamond p \wedge \forall q\,(p \Rightarrow q \vee p$ ● $q)$と同値であることは些末な事柄であるが，（3）の変形は，それ自体は完全に自明であるものの，様相関係の相互連関を明らかにすることになると

いう点では，概念的な価値は非常に大きい．つまり，$\neg$（$p \Rightarrow \neg q$）が $p \bigcirc q$ と同値であることに注意すると，（3）は明らかに次と等しい．

$$p \Rightarrow q \leftrightarrow p \bigcirc q$$

すなわち，原子論的な様相論理においては，厳密含意と両立可能性の区別は消失する．通常，様相論理における原子論が問題となるときには，基本的な概念である厳密含意による諸表現のみが考慮され，このような事実は等閑視されがちである．しかしながら，こうした事実をも考慮に入れつつ思考を巡らせるならば，様相論理における論理的推論において，メレオトポロジー的・幾何学的直観が何らかの役割を果たすということがありうるのではないかと思われる．

（3）についてはさらに関連する事実があり，それは以下の議論において重要な補題としての役割を果たすので，節を改めて検討しよう．

3．補題の証明

（3）は，$\Diamond p \wedge \forall q$（$p \bigcirc q \rightarrow p \Rightarrow q$）と同値である．既述のように，（3）は $p \Rightarrow q \leftrightarrow p \bigcirc q$ と同値であったが，それはもちろん，（3）が次の二つの文の連言であることを意味する．

$$p \Rightarrow q \rightarrow p \bigcirc q$$
$$p \bigcirc q \rightarrow p \Rightarrow q$$

これらのうちの前者 $p \Rightarrow q \rightarrow p \bigcirc q$ が $\Diamond p$ と同値である．それゆえ，（3）は $\Diamond p \wedge \forall q$（$p \bigcirc q \rightarrow p \Rightarrow q$）と等しいのである．

この $\Diamond p$ と $p \Rightarrow q \rightarrow p \bigcirc q$ の同値性は重要であるから，ここで補題（イ）として示しておこう．

（イ）　$\Diamond p \leftrightarrow \forall q\ (p \Rightarrow q \rightarrow p \bigcirc q)$

証明：

（必要性）：$\Diamond p$ および $p \Rightarrow q$ とする．さらに $\neg (p \bigcirc q)$ と仮定する．定義より $\neg\neg (p \Rightarrow \neg q)$．すなわち $p \Rightarrow \neg q$．p と仮定する．仮定 $p \Rightarrow q$ より $p \rightarrow q$．ゆえに q．他方で $p \rightarrow \neg q$ である．ゆえに $\neg q$ である．矛盾．ゆえに $p \bigcirc q$．よって，$\forall q\ (p \Rightarrow q \rightarrow p \bigcirc q)$．

（十分性）：$\forall q\ (p \Rightarrow q \rightarrow p \bigcirc q)$ とする．すると $p \Rightarrow p \rightarrow p \bigcirc p$ がいえる．$p \Rightarrow p$ であるから，$p \bigcirc p$．すなわち $\Diamond p$．■

言うまでもないが，この補題には，定理 $\Diamond p \rightarrow (p \Rightarrow q \rightarrow p \bigcirc q)$ が含まれている．$p \Rightarrow q \rightarrow p \bigcirc q$ は，いわゆる大小対当にあたる．この定理は，高階様相論理において，大小対当が条件つきで成り立つことを述べている．

必要性の部分の証明に注目する．$\neg (p \bigcirc q)$ という仮定は $p \bullet q$ と等しい．これは，定義によって $p \Rightarrow \neg q$ と書き換えられる．先に $p \Rightarrow q$ とおいてあったので，矛盾は明らかであろう．それゆえ，やはり定義より，$p \bullet q$ の否定として $p \bigcirc q$ が導かれるのである．

十分性の部分においては，$\Diamond p$ と $p \bigcirc p$ の同値性が用いられた．これは本稿の最初の節で述べた言い換えの一例である．

この補題の証明を通じて明らかになったことは，高階様相論理の基本概念がメレオトポロジー的な性質をもっており，したがって，それを導きとした推論が可能である，ということである．本稿の最初の章で示した基本的な関係の言い換えは，論証を遂行する上で有用な事実であるということができる．

4．定理と証明

さて，以下では，これまで示した諸関係の言い換え可能性や補題を利用して，先に列挙した原子論の諸テーゼの同値性を示してゆく．（1）と（2）の同値性の証明から始めて，（1）と（3）の同値性，（3）と（4）の同値性，（3）と（5）の同値性を順に示してゆく．このような証明の方法は論理的にはもちろん迂遠であるが，直観的な理解を容易にするため，また，メレオトポロジーとの関連性を明確にするために，敢えてこのような方針を採る．では証明にとりかかるとしよう．

定理　（1）と（2）は同値である．

証明：

（1）の一部である$\forall q(p \Rightarrow q \lor p \Rightarrow \neg q)$と，（2）の一部である$\forall q((\Diamond q \land q \Rightarrow p) \rightarrow p \Rightarrow q)$の同値性を示せばよい．

（1）から（2）：$\forall q(p \Rightarrow q \lor p \Rightarrow \neg q)$とする．さらに$\Diamond q \land q \Rightarrow p$と仮定する．補題から$q \bigcirc p$．つまり$p \bigcirc q$（対称性）．定義より$\neg(p \Rightarrow \neg q)$．前提より，$p \Rightarrow q$と仮定する．このとき明らかに$p \Rightarrow q$．他方で，やはり前提から，$p \Rightarrow \neg q$と仮定する．これは先の帰結に矛盾する．ゆえに$p \Rightarrow q$．よって$p \Rightarrow q$．したがって，$\forall q((\Diamond q \land q \Rightarrow p) \rightarrow p \Rightarrow q)$．

（2）から（1）：$\forall q((\Diamond q \land q \Rightarrow p) \rightarrow p \Rightarrow q)$とする．$p \Rightarrow q \lor \neg(p \Rightarrow q)$である（排中律）．そこで$p \Rightarrow q$と仮定する．明らかに$p \Rightarrow q \lor p \Rightarrow \neg q$．他方で$\neg(p \Rightarrow q)$と仮定

する．定義より$\neg\Box$（$p\rightarrow q$）．つまり$\Diamond$（$p\wedge\neg q$）．ところで，（$p\wedge\neg q$）$\Rightarrow p$（論理）．（1）より$\Diamond$（$p\wedge\neg q$）$\wedge$（(（$p\wedge\neg q$）$\Rightarrow p$）$\rightarrow$（$p\Rightarrow$（$p\wedge\neg q$）)）．ゆえに$p\Rightarrow$（$p\wedge\neg q$）．ところで，（$p\wedge\neg q$）$\Rightarrow\neg q$（論理）．ゆえに$p\Rightarrow\neg q$（三段論法）．すると明らかに$p\Rightarrow q\vee p\Rightarrow\neg q$．したがって，$\forall q$（$p\Rightarrow q\vee p\Rightarrow\neg q$）．■

（2）から（1）への証明において，$\neg$（$p\Rightarrow q$）から$\Diamond$（$p\wedge\neg q$）を導いているが，これは$p\Leftarrow q$から$p\bigcirc\neg q$を導くことに他ならず，実質的に，定義による書き換えである．メレオトポロジーの性質を既知とすれば容易に想到しうるものであることは明らかであろう[(6)]．

次の定理の証明に移ろう．

定理　（1）と（3）は同値である．

証明：

（1）から（3）：$\Diamond p\wedge\forall q$（$p\Rightarrow q\vee p\Rightarrow\neg q$）とする．すると$\Diamond p$．ここで$p\Rightarrow\neg q$と仮定する．補題より$p\bigcirc\neg q$．定義より$\neg$（$p\Rightarrow\neg\neg q$）．すなわち$\neg$（$p\Rightarrow q$）．ゆえに，$p\Rightarrow\neg q\rightarrow\neg$（$p\Rightarrow q$）．これで一方が示せた．逆を示す．$\neg$（$p\Rightarrow q$）と仮定する．前提から$p\Rightarrow q\vee p\Rightarrow\neg q$．一方で$p\Rightarrow q$と仮定する．矛盾．よって$p\Rightarrow\neg q$．他方で$p\Rightarrow\neg q$と仮定するが，すると結論は明らかに$p\Rightarrow\neg q$．ゆえに，$\neg$（$p\Rightarrow q$）$\rightarrow p\Rightarrow\neg q$．ゆえに，$\forall q$（$\neg$（$p\Rightarrow q$）$\leftrightarrow$（$p\Rightarrow\neg q$））．

（3）から（1）：$\forall q$（$\neg$（$p\Rightarrow q$）$\leftrightarrow$（$p\Rightarrow\neg q$））とする．$p\Rightarrow q$と仮定する．明らかに$\forall q$（$p\Rightarrow q\vee p\Rightarrow\neg q$）．他方

で，$\neg$（$p \Rightarrow q$）と仮定する（排中律）．前提より明らかに $p \Rightarrow \neg q$．すると直ちに $\forall q$（$p \Rightarrow q \vee p \Rightarrow \neg q$）．したがって $\forall q$（$p \Rightarrow q \vee p \Rightarrow \neg q$）．他方で，$\forall q$（$\neg$（$p \Rightarrow q$）$\leftrightarrow$（$p \Rightarrow \neg q$））より，ただちに $\forall q$（（$p \Rightarrow q$）$\leftrightarrow \neg$（$p \Rightarrow \neg q$））である．それゆえ明らかに $\forall q$（（$p \Rightarrow q$）$\leftrightarrow \neg$（$p \Rightarrow \neg q$））だから，$\forall q$（（$p \Rightarrow q$）$\rightarrow p \bigcirc q$）．補題より $\Diamond p$．したがって，$\Diamond p \wedge \forall q$（$p \Rightarrow q \vee p \Rightarrow \neg q$）．■

ここで，補題と厳密含意と両立可能性の言い換え可能性が効果的に用いられていることは明らかであろう．

さらに次の定理の証明に移ろう．

定理　（3）と（4）は同値である．

（3）の一方である（$p \Rightarrow \neg q$）$\rightarrow \neg$（$p \Rightarrow q$）と（4）の $\Diamond p$ の同値性はすでに示した．それゆえ，（3）のもう一方である $\neg$（$p \Rightarrow q$）$\rightarrow$（$p \Rightarrow \neg q$）と，（4）の $\forall q \forall r$（$p \bigcirc q \wedge q \bigcirc r \rightarrow p \bigcirc r$）とについて，それぞれ一方から他方が帰結することを示せばよい．

証明：

（3）から（4）：$p \bigcirc q \wedge q \bigcirc r$ とする．すると，$p \bigcirc q$．また，$q \bigcirc r$．それぞれ変形して，$\neg$（$p \Rightarrow \neg q$），および $\neg$（$q \Rightarrow \neg r$）．（3）より，それぞれから，$p \Rightarrow \neg\neg q$ および $q \Rightarrow \neg\neg r$．明らかに $p \Rightarrow q$ および $q \Rightarrow r$．ゆえに $p \Rightarrow r$（三段論法）．これは $p \Rightarrow \neg\neg r$ と同値．よって，（3）より $\neg$（$p \Rightarrow \neg r$）．変形して $p \bigcirc r$．

（4）から（3）：$\neg$（$p \Rightarrow q$）とする．$\neg$（$p \Rightarrow \neg q$）と仮定す

る．前提より$\neg(p \Rightarrow \neg\neg q)$．すなわち$p \bigcirc \neg q$．仮定より$p \bigcirc q$．つまり$q \bigcirc p$．（4）すなわち○の推移性より，$q \bigcirc \neg q$．矛盾．ゆえに$\neg\neg(p \Rightarrow \neg q)$．したがって$p \Rightarrow \neg q$．■

この定理は，実質的には厳密含意と両立可能性の言い換えによる変形に他ならないとも言える．両者の双対性に注意すべきであろう．

最後の定理の証明を検討しよう．

定理　（3）と（5）は同値である．

（3）から（5）：（3）より$\Diamond p$である．$p \Rightarrow q \vee r$と仮定する．補題から，$p \bigcirc q \vee r$．定義より$\Diamond(p \wedge (q \vee r))$．したがって$\Diamond((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$．さらに$\Diamond(p \wedge q) \vee \Diamond(p \wedge r)$．再び定義より$p \bigcirc q \vee p \bigcirc r$．大小関係の逆が言えることから，$p \Rightarrow q \vee p \Rightarrow r$．

（5）から（3）：$\Diamond p \wedge \forall q \forall r (p \Rightarrow q \vee r \rightarrow p \Rightarrow q \vee p \Rightarrow r)$とする．すると$p \Rightarrow q \vee \neg q \rightarrow p \Rightarrow q \vee p \Rightarrow \neg q$が言える．他方で$p \Rightarrow q \vee \neg q$がなりたつ．ゆえに$p \Rightarrow q \vee p \Rightarrow \neg q$．つまり（1）．（1）は（3）と同値であったから，題意は示された．■

この証明では，両立可能性が選言に関する分配性をもつことが示されているが，これは位相作用素の閉包の性質と類比的であり，メレオトポロジーの特徴的な性質のひとつでもある．

以上より，高階様相論理における原子論には多様な表現がありうることが明らかとなった．こうした多様性を認識するのに，基本的な概念間の言い換えの可能性の知識が大きく資することは言を俟たないであろう．

5．もうひとつの定理

高階様相論理における原子論と関連する次のような定理がある．この証明はこれまで論じてきた事実が活用される場面のひとつであるから，ここで論じておくのは適切であろう．

原子論の主張を Atom（p）とする．このとき，次が成り立つ．

定理　以下の二つの主張は同値である．

At　　$\Box\exists p\,(p \wedge \forall q\,(q \rightarrow p \Rightarrow q))$

At*　　$\Box\exists p\,(\mathrm{Atom}(p) \wedge p)$

これらは次の主張とも同値である．

At**　　$\Box\exists p\,\forall q\,(q \leftrightarrow p \Rightarrow q)$

これらの諸命題の相互関係について付記しておくと，At と At*はガリンとウィリアムソンが論じているが，At**には触れていない[(7)]．At**との関連は和田和行によって明らかにされた．したがって，これら諸命題の関係は周知の事柄であると言ってよいが，メレオトポロジーとの関連を追うという本稿の方針の下で再検討してみよう[(8)]．

はじめに補題を二つ示す．

（ロ）　$\mathrm{Atom}(p) \wedge p \leftrightarrow \forall q\,(q \leftrightarrow p \Rightarrow q)$

証明：

必要性：Atom（p）∧ p とする．すなわち$\Diamond p \wedge (p \Rightarrow q \vee$

$p \Rightarrow \neg q) \wedge p$. ゆえに p. また，$p \Rightarrow q \vee p \Rightarrow \neg q$. そこで $p \Rightarrow q$ と仮定する．すると明らかに $q \rightarrow p \Rightarrow q$. 他方で $p \Rightarrow \neg q$ と仮定する．ゆえに $p \rightarrow \neg q$. p であったから，$\neg q$. ゆえに $q \rightarrow p \Rightarrow q$. よって $q \rightarrow p \Rightarrow q$. これで一方が示せた．逆を示す．$p \Rightarrow q$ と仮定する．すると $p \rightarrow q$. p であるから，q. よって $p \Rightarrow q \rightarrow q$. 双方を合わせて $\forall q\,(q \leftrightarrow p \Rightarrow q)$.

十分性：$\forall q\,(q \leftrightarrow p \Rightarrow q)$ とする．$p \leftrightarrow p \Rightarrow p$. $p \Rightarrow p$ であるから，p. ゆえに $\Diamond p$. $q \vee \neg q$ より，まず q と仮定する．すると，$p \Rightarrow q$. ゆえに $p \Rightarrow q \vee p \Rightarrow \neg q$. 次に $\neg q$ と仮定する．$\neg q \leftrightarrow p \Rightarrow \neg q$ であるから，$p \Rightarrow \neg q$. ゆえに $p \Rightarrow q \vee p \Rightarrow \neg q$. したがっていずれにせよ $p \Rightarrow q \vee p \Rightarrow \neg q$. よって $\Diamond p \wedge (p \Rightarrow q \vee p \Rightarrow \neg q) \wedge p$. ゆえに $\mathrm{Atom}(p) \wedge p$. ■

（ハ）　$p \wedge \forall q\,(q \rightarrow p \Rightarrow q) \leftrightarrow \forall q\,(q \leftrightarrow p \Rightarrow q)$

証明：

$p \leftrightarrow \forall q\,(p \Rightarrow q \rightarrow q)$ を示せばよい．p とする．さらに $p \Rightarrow q$ とする．すると $p \rightarrow q$. ゆえに q. よって．$\forall q\,(p \Rightarrow q \rightarrow q)$. 逆を示す．$\forall q\,(p \Rightarrow q \rightarrow q)$ とする．すると $p \Rightarrow p \rightarrow p$. $p \Rightarrow p$ であるから，p. ■

以上の補題から，定理が成り立つことは直ちに明らかである．補題（ロ）と（ハ）により，$\mathrm{Atom}(p) \wedge p \leftrightarrow p \wedge \forall q\,(q \rightarrow p \Rightarrow q)$ である．したがって，$\Box \exists p\,(p \wedge \forall q\,(q \rightarrow p \Rightarrow q))$ と $\Box \exists p\,(\mathrm{Atom}(p) \wedge p)$ は同値である．

本節の証明では様相関係の言い換えは利用されていないが，厳密含意と命題の普遍量化の関係 $\forall q\,(q \leftrightarrow p \Rightarrow q)$ が推理の鎖となっている．和田の考察はこの表現の役割を明らかにしたという点で意義が大きい．

6．おわりに

これまでの考察において，高階様相論理における原子論に関する諸命題の相互関係を証明してきた．このこと自体，当然重要な意義をもっているのであるが，本稿の目的は，証明の過程にメレオトポロジー的要素がどのように組み込まれているのかを明らかにすることであった．考察を終えて，この目的は達せられたものと判断する．

考察を振り返ると，本稿で示されたことは，様相論理への代数的アプローチのひとつであるということができよう．それぞれの論理体系には固有の概念があるが，それらがもつ普遍的特徴に注意するならば，論理体系を従来とは異なる視点から眺めることができる．既知の論理的知識の再活用の可能性を垣間見ることができたことにもいくらかの意義を感じる．

〔文献〕

［非邦語］
Becker O., 1951, *Einführung in die Logistik: Vorzüglich in den Modalkalkül*, Meisenheim am Glan: Westkulturverlag Anton Hain
Gallin, D, 1975, *Intensional and Higher Order Modal Logic*, Amsterdam: Elsevier
Lewis, C. I. & C. H. Langford, 1959, *Symbolic Logic*, New York: Dover
Williamson, T., 2013, *Modal Logic as Metaphysics*, Oxford: Oxford University Press

［邦語］
井関清志，1968，『記号論理学（命題論理)』，槙書店
齋藤暢人，2018，「メレオロジーと原子論」『中央学院大学人間・自然論叢』45，57‒71
――，2020，「メレオトポロジーと単調性」，『中央学院大学人間・自然論叢』49，29‒44
――，2021，「高階様相論理におけるメレオトポロジー」，『中央学院大学人間・

自然論叢』51，51-69
永井成男・和田和行，1989，『記号論――その論理と哲学――』，北樹出版
――・――，1997，『哲学的論理学――基礎と研究――』，北樹出版
和田和行，2019，『性質一元論』，せりか書房

〔注〕

（1）齋藤（2021）をみよ.

（2）井関（1968: 233）

（3）古典的メレオロジーにおける原子論については齋藤（2018）で述べた.

（4）古典的メレオトポロジーにおける述語の論理的性質については齋藤（2020）で述べた.

（5）永井・和田（1989: 292）.

（6）ただし，この証明は本質的には永井・和田（1997: 268f., 275f.）に負う.

（7）Gallin（1975: 84-86), Williamson（2013: 201f.）

（8）和田（2019: 70f.）