CVP分析に関する一考察

河 野 一 郎

〈目　次〉

1　はじめに

CVP分析は利益管理のための方法として用いられているものであり，ビアマン[1]やジェディキィとロビチェク[2]によって不確実性のもとでの分析がなされて以来，多くの拡張が展開されてきている。本稿では不確実性下の多品種生産CVP分析，習熟性の考慮およびファジー集合とCVP分析について考察を加える。

2　CVP分析の展開

2-1　不確実性下の多品種生産CVP分析

不確実性下の多品種生産 CVP 分析としてジョンソン＝シミックモデルをとりあげる[3]。

ジョンソン＝シミックモデルでは，販売量を正規分布するランダム変数とし，製品単位当りの貢献差益は一定としており，多品種生産品の需要の間の相互依存性を考慮している。

市場に対してn種の製品を販売しうる企業があるとし，これらのn種の製品に対する需要をX_1，X_2，……，X_nとする。そしてこれらの需要の平均をμ_1，μ_2，……，μ_nで示す。n種の製品の需要についての正定の対称的な分散・共分散行列は次のように定義される。

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ \rho_{21}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \cdots & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1}\sigma_n\sigma_1 & \rho_{n2}\sigma_n\sigma_2 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}
$$

ここで $i=j$ ならば $\sigma_{ij}=\sigma_i^2$

　　　$i \neq j$ ならば $\sigma_{ij}=\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$

製品 i と製品 j の需要間の相関係数は ρ_{ij} であり，そしてこれは需要間の線型的な関係の程度を測定している（ただし$\rho_{ij}=\rho_{ij}$）.

$$
\mathrm{X}=\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}, \quad \mu=\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix},
$$

$$
\Sigma=\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}
$$

とすると，それぞれの需要X_i（$i=1$，……，n）は正規分布であると仮定されているので，X_1，X_2，……，X_nは結合正規分布となる.

$$
\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \sim N\left[\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}\right]
$$

とすれば，

$$
X \sim N(\mu, \ \Sigma)
$$

となる.

n個の製品の価格をP_1, P_2, ……, P_nとし, 製品1単位の変動費を v_1, v_2, ……, v_n, これに相応した製品1単位の貢献差益をC_1，C_2，……，C_nとする．なお各

製品の固定費をf_1，f_2，……，f_nとする。

$$C=\begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix},\quad I=\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

とすると，利益（π）は，

$$\pi = C^{\mathrm{T}}X - F^{\mathrm{T}}I$$

$$= [C_1,\ \cdots\cdots,\ C_n]\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} - [f_1,\ \cdots,\ f_n]\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n} C_i X_i - \sum_{i=1}^{n} f_i$$

となる。

多変量統計の基本定理により総利益（π）は一変量の正規分布となる。

$$\pi \sim N(C^{\mathrm{T}}\mu - F^{\mathrm{T}}I,\ C^{\mathrm{T}}\Sigma C)$$

ここで，

$$E(\pi) = C^{\mathrm{T}}\mu - F^{\mathrm{T}}I$$

$$=\sum_{i=1}^{n} C_i\mu_i - \sum_{i=1}^{n} f_i$$

$$V_{ar}(\pi) = C^{\mathrm{T}}\Sigma C$$

$$= [C_1,\ \cdots,\ C_n]\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}C_iC_j$$

である。

次に販売量やその他の変数の確率密度関数に関する前提を必要としない多品種生産のCVP分析について考察しよう。[(4)]

多品種生産の利益公式は,

$$P=\sum_{i=1}^{n}(p_i-v_i)x_i-F$$

ここで

p_i ＝製品 i の販売価格

v_i ＝製品 i の変動費

x_i ＝製品 i の販売量

F ＝固定費

P ＝利益

となる.

製品 i に対してランダムな変数であるとき，製品 j に対してもランダムな変数であると仮定すると,

$$\sum_{i=1}^{4}\binom{4}{i}=15$$

となり，利益 P は15のランダムな変数としての可能性をもつ.

これらのうちから2つの方法について考えてみよう．第一の方法は x_i だけがランダムな変数であり，p_i と v_i は一定であるとした場合である．第二の方法は，すべての i に対してp_i，v_i，x_i がランダムな変数となる場合であり，このとき (p_i-v_i) x_iもランダムな変数となる.

x_i だけをランダムな変数とする時には，すべての i に対してその平均値を$E(x_i)$とし，レンジを,

$$-\infty<a_i\leqq x_i\leqq b_i<\infty$$

とする．p_i，v_i，x_i をランダムな変数とする第二の方法では，その平均値を$E[(p_i-v_i)x_i]$ とし，変数 $(p_i-v_i)x_i$のレンジを,

$$-\infty<q_i\leqq[(p_i-v_i)x_i]\leqq r_i$$

とする．$(a_i,\ b_i)$ は変数 x_i のレンジであり $(q_i,\ r_i)$ は変数 $(p_i-v_i)x_i$ のレンジである.

y_1，y_2，……，y_k を分散 $V_{ar}(y_s)=\sigma_s^2$レンジが$w_s\leqq y_s\leqq z_s$である相互に独立でランダムな変数であるとすると,

$$S=\sum_{s=1}^{k} y_s$$

$$E(S)=\sum_{s=1}^{k} E(y_s)$$

$$\sigma^2=V_{ar}(S)=\sum_{s=1}^{k} \sigma_s{}^2$$

である。

ランダムな変数の部分合計をつくり，これらの部分合計が相互に独立であるとし，この部分合計を y_s とする。部分合計 y_s のランダムな変数は相互に独立である必要はない。

ここで，ランダムな変数の分散は不明であるが，有限なレンジを持つと仮定しているので，その可能な最大の分散を $\bar{\sigma}_s{}^2$ とする。

$w_s \leqq y_s \leqq z_s$ であるから，

$$\sigma_s{}^2 \leqq \bar{\sigma}_s{}^2=\frac{(z_s-w_s)^2}{4}$$

となる。

$$P_r\{P-E(P) \geqq t\}$$

とすると，販売量 x_i のみがランダムな変数であるとした最初のケースでは，

$$P_r\{\sum_{i=1}^{n}(p_i-v_i)\ [x_i-E(x_i)] \geqq t\}\ \cdots(1)$$

となる。

$(p_i-v_i)x_i$ がランダムな変数であるとした第二のケースでは，

$$P_r\{\sum_{i=1}^{n}((p_i-v_i)x_i-E[(p_i-v_i)\ x_i]) \geqq t\}\ \cdots(2)$$

となる。

ここで，

$$y_s=\sum_{i=m'_{s-1}+1}^{m'_s}[(p_i-v_i)x_i]$$

$$m'_s=\sum_{i=1}^{S} m_i,\ \ m'_0=0\ ,\ \ m'_k=n$$

とすると，(1)は次のようになる。

$$P_r\{\sum_{s=1}^{k}[y_s-E\ \ (y_s)] \geqq t\}$$

たとえば，もし7個のランダムな変数を4個と3個の二つの部分合計にそれぞれ分けるとすれば，

$$n=7,\ k=2,\ m_1=4,\ m_2=3,$$

$$m'_0=0,\ m'_1=4,\ m'_2=7$$

$$y_1=\sum_{i=1}^{4}(p_i-v_i)x_i,\ \ y_2=\sum_{i=5}^{7}(p_i-v_i)x_i$$

となる。

相互に独立な部分合計がないときは，

$m'_1=n$，$k=1$ となる．このときの最大の分散 $\bar{\sigma}_s{}^2$ は，

$$\sum_{i=m'_{s-1}+1}^{m'_s}(p_i-v_i)a_i \leqq y_s \leqq \sum_{i=m'_{s-1}+1}^{m'_s}(p_i-v_i)b_i$$

であるから，

$$\bar{\sigma}_s{}^2=\Big[\sum_{i=m'_{s-1}+1}^{m'_s}(p_i-v_i)(b_i-a_i)\Big]^2/4$$

となる。

同様に(2)は，

$$P_r\{\sum_{s=1}^{k}(y_s-E(y_s))\geqq t\}$$

ここで，

$$y_s=\sum_{i=m'_{s-1}+1}^{m'_s}[(p_i-v_i)x_i],$$

この場合の最大の分散 $\bar{\sigma}_s{}^2$は，

$$\sum_{i=m'_{s-1}+1}^{m'_s}q_i \leqq y_s \leqq \sum_{i=m'_{s-1}+1}^{m'_s}r_i$$

であるから，

$$\bar{\sigma}_s{}^2=\Big[\sum_{i=m'_{s-1}+1}^{m'_s}(r_i-q_i)\Big]^2/4$$

となる。

そして，UspenskyとHoeffdingの不等式により，

$$P_r\ \{P-E(P)\geqq t\}\ \leqq\frac{1}{[1+(t^2/\sigma^2)]}$$

$$\leqq \frac{1}{[1+(t^2/\bar{\sigma}^2)]} = \frac{1}{(1+l)}$$

$$P_r\{P-E(P)\geqq t\} \leqq \exp\left(\frac{-t^2}{2\bar{\sigma}^2}\right)$$

$$=\exp\left(-\frac{l}{2}\right)$$

ここで,

$\bar{\sigma}^2=\sum_{s=1}^{k}\bar{\sigma}_s{}^2$そして, $l=\left(\frac{t}{\bar{\sigma}_s{}^2}\right)^2$

となる。

2-2　習熟性とCVP分析

反復的性質をもつ作業遂行に要する時間は，作業に慣れるにつれて短縮されることが見い出されている。そして，これらの仕事をなす原価も作業の経験が蓄積されていくにつれて逓減していく。

原価の長期的な逓減を導く要因として次のようなものが含まれる。(5)

①労働の効率性——遂行と反復による学習。更に，より効果的な維持および監督活動。

②新しい工程と改良された方法——改良された生産技術，生産工学の研究。

③製品の設計改良——費用がかかる点または不必要な点の除去。

④製品の標準化——切替えと段取りの削減。すなわち反復の増加。

⑤規模の効果——規模の経済。能力原価は能力に比してゆっくりと増加するため。

数学的に習熟効果は,

$Y=a\cdot Q^b$

ここで,

Y＝Q単位を生産するのに要する単位当り平均直接労働時間数

a ＝最初の単位についての直接労働時間数

b ＝習熟指数

Q＝累積生産単位数

で示され，習熟性を考慮した損益分岐点分析は次のように展開される[6].

生産品の Q 単位を生産するのに要する総労働時間 T は,

$$T=Q\cdot Y=a\cdot Q^{b+1}$$

もし T が与えられたならば,

$$Q=\left(\frac{T}{a}\right)^{\frac{1}{(b+1)}}$$

n 期の終りに至るまでに利用できる総累積直接労働時間 T_n ($T_n=\sum_{i=1}^{n}t_i$, t_i は期間 i に利用できる総直接労働時間) であり，期間 n に生産されうる総生産数量 Q_nは,

$$Q_n=\left(\frac{T_n}{a}\right)^{\frac{1}{(b+1)}}-\left(\frac{T_{n-1}}{a}\right)^{\frac{1}{(b+1)}} \quad \cdots\cdots(1)$$

となる.

その結果，習熟指数とそれぞれの期間の総予定直接労働時間数が与えられたなら，それぞれの期間の総予定生産が推定されうる．さらに期間 n における予定利益は次のように決定される（直接原価計算又は在庫レベルに変化がないことを仮定する).

$$Z_n=(P-VSE)\cdot Q_n-(DM\cdot Q_n)$$
$$-t_n\cdot(DL+VOH)-FC$$

ここで,

Z_n　＝期間 n における利益

P　＝単位当り販売価格

VSE ＝単位当り変動販売費

DM　＝単位当り直接材料費

DL　＝単位時間当り直接賃率

VOH＝直接労働時間当りの変動間接費配賦率

FC　＝総固定費

習熟効果の考慮は損益分岐点の決定に拡張される。損益分岐点では総収益と総費用が等しくなる。

$$P \circ Q_{be} = (VSE \circ Q_{be}) + (DM \circ Q_{be}) + t_{be(n)} \circ (DL + VOH) + FC \quad \cdots\cdots(2)$$

ここで，

Q_{be}＝損益分岐点単位数

$t_{be(n)}$＝期間 n において Q_{be} 生産するのに要する直接労働時間数

方程式(1)から，期間nの損益分岐点数量は次のように求められる。

$$Q_{be} = \left[\frac{T_{n-1} + t_{be(n)}}{a} \right]^{\frac{1}{(b+1)}} - \left[\frac{T_{n-1}}{a} \right]^{\frac{1}{(b+1)}}$$

これを整理すると，

$$t_{be(n)} = a \circ \left[Q_{be} + \left(\frac{T_{n-1}}{a} \right)^{\frac{1}{(b+1)}} \right]^{(b+1)} - T_{n-1} \quad \cdots\cdots(3)$$

方程式(3)を方程式(2)に代入すると，

$$(P - VSE - DM) \circ (Q_{be}) - a \circ \left[Q_{be} + \left(\frac{T_{n-1}}{a} \right)^{\frac{1}{(b+1)}} \right]^{(b+1)} \circ (DL + VOH) + T_{n-1} \circ (DL + VOH) - FC = O \quad \cdots\cdots(4)$$

期間nの損益分岐点は方程式(4)をQ_{be}で解くことによって決定される。

2－3　ファジー理論とCVP分析

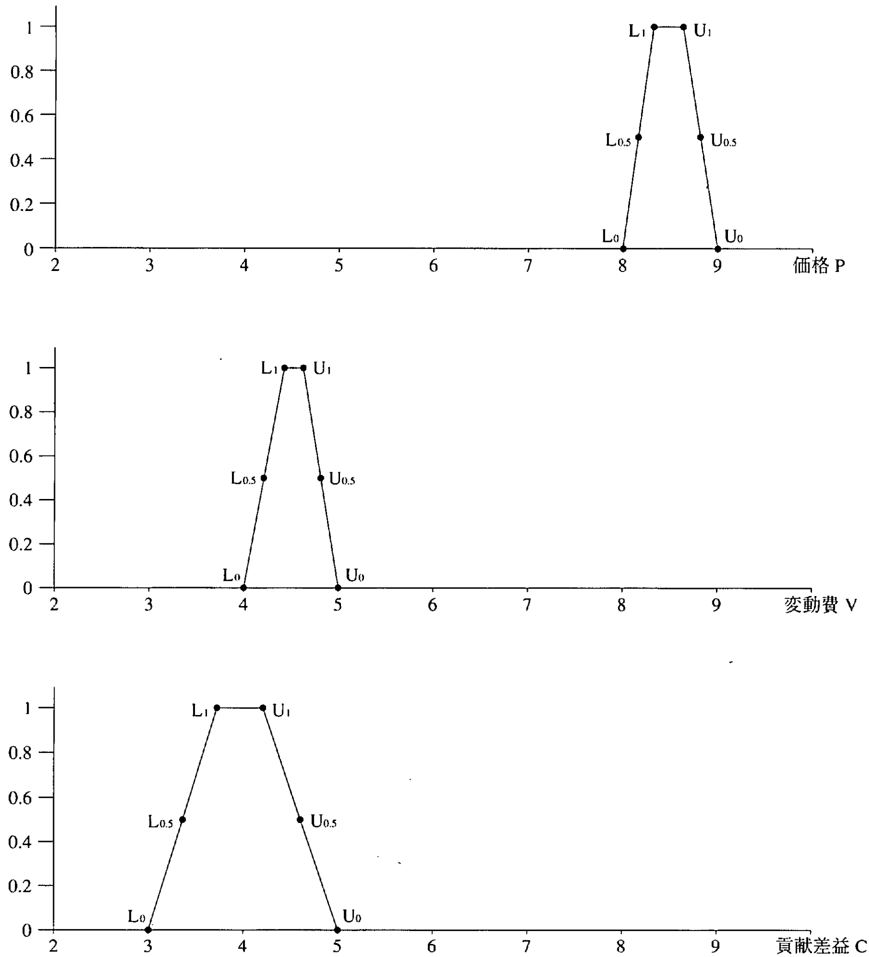
製品の価格や変動費がファジー集合である場合について考察を加える。(7)

製品の価格Pと変動費Vおよび貢献差益C＝$P-V$　のメンバーシップ関数は表1に示される。

新製品Xと新製品Yのいずれかを導入しようとしている意思決定者がおり，各製品の利益のメンバーシップ関数は表2に示される。

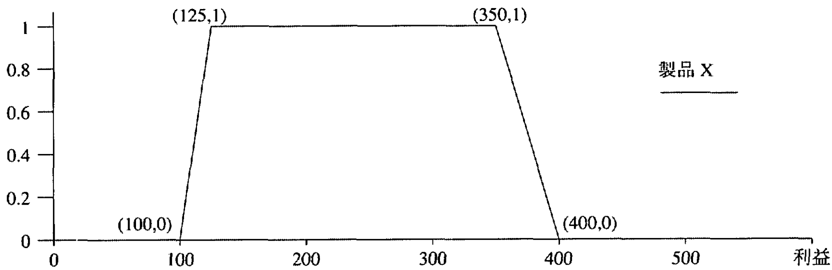
どちらの製品を導入すべきかを決定するために領域R1，R2，R3，R4が用いられる。

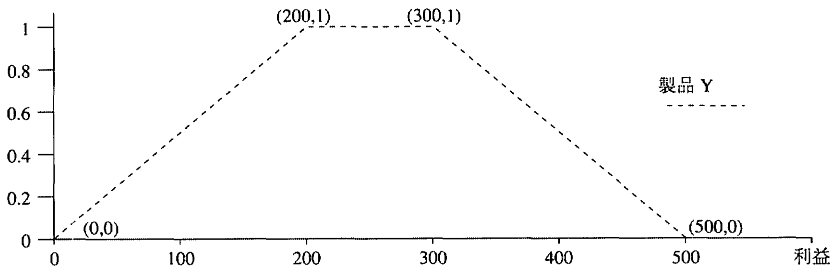
表1　製品の価格Pと変動費Vおよび貢献差益Cのメンバーシップ関数

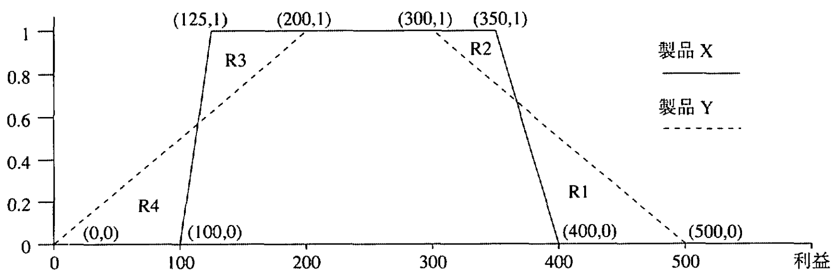


$$L_0(C) = L_0(P) - U_0(V) = 8.0 - 5.0 = 3.0;$$
$$L_{0.5}(C) = L_{0.5}(P) - U_{0.5}(V) = 8.15 - 4.8 = 3.35;$$
$$L_1(C) = L_1(P) - U_1(V) = 8.3 - 4.6 = 3.7;$$
$$U_1(C) = U_1(P) - L_1(V) = 8.6 - 4.4 = 4.2;$$
$$U_{0.5}(C) = U_{0.5}(P) - L_{0.5}(V) = 8.8 - 4.2 = 4.6;$$
$$U_0(C) = U_0(P) - L_0(V) = 9.0 - 4.0 = 5.0.$$

表 2　利益のメンバーシップ関数







意思決定者のリスクに対する姿勢の α により，製品 X に対しての製品 Y の選好度は，

$$\gamma_{yx}=\frac{\alpha A_1+(1-\alpha)A_3}{\alpha(A_1+A_2)+(1-\alpha)(A_3+A_4)}$$

ここで，

A_i ＝領域 R_i の面積

γ_{yx}＝製品 X に対しての製品 Y の選好度

となる。

γ_{yx} の値により製品 X と製品 Y の選択は次のようになる。

①もし $\gamma_{yx}=1.0$ であれば，製品 Y は製品 X に対して選好される。

②もし $0.5<\gamma_{yx}<1.0$ であれば，製品 Y は製品 X に対して幾分か選好される。

③もし $\gamma_{yx}=0.5$ であれば，製品 Y は製品 X に対して中立である。

④もし $\gamma_{yx}<0.5$ であれば，製品 X は製品 Y よりも幾分か選好される。

〔注〕

(1) Harold Bierman, Jr., Topics in Cost Accounting and Decisions, pp. 36-40, 44-46, 1963.

(2) Robert K. Jaedicke and Alexander A. Robichek, "Cost-Volume-Profit Analysis under Conditions of Uncertainty", Accounting Review, pp. 917-926, 1964.

(3) Glenn L. Johnson and S. Stephen Simik II, "Multiproduct C-V-P Analysis under Uncertainty", Journal of Accounting Research, pp. 278-286, Autumn, 1971.

(4) Glenn L. Johnson and S. Stephen Simik II, "The Use of Probability Inequalities in Multiproduct C-V-P Analysis Under Uncertainty", Journal of Accounting Research, pp. 67-74, Spring, 1974.

(5) キャプテン：西村明・昆誠一監訳『上級管理会計』中央経済社，44頁，平成元年。

(6) Woody M. Liao, "The effects of Learning on Cost-Volume-Profit Analysis", Cost and Management, pp. 38-39, November-December 1983.

(7) Y. Lilian Chan and Yufei Yuan, "Dealing with Fuzziness in Cost-Volume-Profit Analysis", Accounting and Business Research. pp. 83-89, 1990.